Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 21 (1975)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: HENRI LEBESGUE ET L'ÉCOLE MATHÉMATIQUE POLONAISE: APERÇU ET SOUVENIRS

Autor: Kac, Mark

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-47332

HENRI LEBESGUE
ET L'ÉCOLE MATHÉMATIQUE POLONAISE: APERÇU ET SOUVENIRS

par Mark KAC

Henri Lebesgue était un grand mathématicien, — un des plus grands de notre siècle, — peut-être un des plus grands de tous les temps. Son influence sur la mathématique était aussi vaste que profonde, et aujourd'hui il est impossible de trouver un seul étudiant en mathématique qui ne connaisse pas le nom Lebesgue. Mais l'influence, directe et indirecte, de Lebesgue sur la mathématique polonaise et sur les mathématiciens polonais entre les deux guerres fut tellement remarquable qu'elle mérite une discussion à part.

Les mathématiciens polonais furent parmi les premiers à apprécier l'importance des idées de Lebesgue, et ils commencèrent à les étudier et étendre à une époque où elles étaient ou inconnues ou ignorées dans les grands centres de mathématique comme Goettingen. Un des premiers cours sur la théorie de Lebesgue hors de France fut fait par Sierpinski en 1916, alors qu'il était jeune Maître de conférences à Léopol, et un autre fut donné, aussi à Léopol, par Steinhaus en 1919.

Lebesgue était le saint Patron de l'Ecole polonaise, et parmi les mathématiciens polonais son nom était presque sacré. Pour mieux comprendre ce phénomène tellement extraordinaire il faut faire une courte revue de l'histoire de l'Ecole polonaise. Il y avait en effet deux Ecoles: l'une a Varsovie, et l'autre à Léopol (Lwow).

L'Ecole de Varsovie, fondée en 1919 par Janiszewski, Sierpinski et Mazurkiewicz, était du point de vue historique plus remarquable, car elle fut créée dans le but d'amener la Pologne au niveau mondial en mathématique. Pour accomplir cette tâche les trois jeunes hommes décidèrent de se limiter aux domaines de recherches qui dans les pays plus développés n'étaient ni connus ni populaires. Leur choix, tellement heureux, comme l'a montré l'avenir, était la théorie des ensembles et la topologie générale.

On trouve l'influence de Lebesgue sur l'Ecole de Varsovie principalement dans deux directions:

a) le problème général de la mesure, et

b) la théorie des ensembles analytiques et projectifs.

C'est à Vitali que nous devons le premier exemple d'un ensemble non-mesurable au sens de Lebesgue. Pour le « construire » Vitali utilisait essentiellement l'invariance par rapport aux translations de la mesure de Lebesgue ainsi que l'axiome du choix. Le problème qui se posait d'une façon tout à fait naturelle était le suivant: l'invariance de la mesure par rapport aux translations est-elle indispensable? En d'autres termes: existe-t-il des ensembles non-mesurables par rapport à *chaque* mesure complètement additive ? Banach et Kuratowski ont donné la réponse positive à cette question en supposant que l'hypothèse du continu était vraie. Ulam a obtenu le même résultat sous des hypothèses beaucoup plus faibles et il a mis en évidence l'intime liaison entre ce problème et la théorie des nombres cardinaux et ordinaux. Ces résultats profonds se trouvent encore aujourd'hui au centre de recherches dans la théorie des ensembles.

La théorie des ensembles analytiques et projectifs, une des lignes principales des recherches à Varsovie, commença par une erreur de Lebesgue ! Dans son grand mémoire de 1905, Lebesgue affirma que la projection d'un ensemble borélien plan sur chaque droite est aussi un ensemble borélien (linéaire). Lusin a remarqué que cette affirmation n'est pas vraie en général et il a proposé à son élève Souslin de faire une étude approfondie de ce sujet. Avant sa mort prématurée et tragique Souslin fit beaucoup de progrès et il laissa des travaux particulièrement profonds. Sierpinski (qui était un ami de Lusin), Kuratowski et ses élèves continuèrent les études de Lusin et Souslin, et créèrent une théorie riche qui de nos jours inspire encore des travaux en mathématique et en logique. Voilà donc une preuve concluante que les erreurs de grands savants peuvent devenir énormément fécondes !

L'influence de Lebesgue sur l'Ecole de Léopol fut plus directe. Cette Ecole fondée par Steinhaus et Banach (un peu plus tard que l'Ecole de Varsovie) s'occupait principalement d'analyse fonctionelle avec ses applications diverses, de la théorie générale des systèmes orthogonaux et de la théorie des probabilités. Il n'y a aucun doute que toutes ces théories ne pouvaient pas atteindre leur niveau actuel sans l'intervention essentielle de la mesure et de l'intégrale de Lebesgue et que les idées d'intégrale et de mesure de Lebesgue y ont trouvé les applications les plus frappantes et les plus fructueuses.

Si on réfléchit au grand succès de l'Ecole de Léopol il est difficile de croire que contrairement à l'Ecole de Varsovie, sa naissance fut un produit du hasard.

Voilà comme cela s'est passé: un jour en 1916 Steinhaus, qui avait déjà étudié la théorie de Lebesgue, et qui avait déjà publié quelques travaux sur les séries trigonométriques, en se promenant dans un parc à Cracovie fut frappé d'entendre les mots « calka Lebesgua » — « intégrale de Lebesgue » en Polonais. Ces mots, tellement inhabituels dans ces circonstances, provenaient d'une conversation entre deux jeunes gens. Infiniment étonné, Steinhaus se présenta et fit leur connaissance. L'un était Banach, l'autre Nikodym, un des auteurs du célèbre théorème de Radon-Nikodym, qui généralise un théorème classique de Lebesgue sur la différentiation des fonctions absolument continues. De cette manière Henri Lebesgue devint le parrain de l'Ecole de Léopol!

L'histoire de l'analyse fonctionelle est trop bien connue pour qu'il soit utile de la répéter. Il est beaucoup moins connu que Steinhaus proposa dans un mémoire remarquable de 1923 la première axiomatisation du jeu de pile ou face en montrant que la théorie de ce jeu est *équivalente* à la théorie de la mesure de Lebesgue dans l'interval (0,1). C'est ce mémoire qui attira l'attention de l'Ecole probabiliste Russe et conduisit Kolmogorov vers l'axiomatisation définitive de la théorie des probabilités.

En 1938 la Faculté des sciences de l'Université de Jean-Casimir à Léopol conféra à Lebesgue le titre de docteur honoris causa (Steinhaus, qui, parmi les mathématiciens polonais, connaissait le mieux Lebesgue et qui avait l'admiration la plus profonde pour lui, était Doyen de la Faculté des sciences et le spiritus movens de l'action de conférer le doctorat). Heureusement pour nous, Lebesgue décida de faire le voyage en Pologne pour accepter cet honneur, et il resta en Pologne pour une semaine. Pendant son séjour il tint deux conférences inoubliables sur des sujets tout à fait élémentaires.

La première portait sur les constructions géométriques (par la règle et le compas) basées, je crois, sur un travail qu'il a publié dans l'Enseignement Mathématique, et la deuxième sur les racines carrées iterées [1]

$$\varepsilon_1 \sqrt{2 + \varepsilon_2 \sqrt{2 + \varepsilon_3 \sqrt{2 + \dots}}}\ .$$

[1] La valeur de cette racine continue est donnée par la formule simple et élégante

$$2 \cos \frac{\pi}{2} \left[\frac{1 - \varepsilon_1}{2} + \frac{1 - \varepsilon_1 \varepsilon_2}{2^2} + \frac{1 - \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3}{2^3} + \dots \right]$$

On trouve une courte discussion de ce sujet aux pages 250 et 251 du livre récent de M$^{\text{lle}}$ Félix « Message d'un mathématicien: Henri Lebesgue, pour la centenaire de sa naissance », Albert Blanchard, Paris, 1974.

On y trouve des choses profondes (du point de vue scientifique) et des choses touchantes (du point de vue humain), et je suis très reconnaissant à M$^{\text{lle}}$ Félix de sa gentillesse de m'avoir présenté une copie de son livre à l'occassion de la cérémonie à Genève.

Lebesgue refusa aussi aimablement que fermement de discuter de l'intégrale et de la mesure!

J'étais à cette époque (à cause de l'absence d'Ulam déjà parti pour les Etats Unis) Sécrétaire de la Section à Léopol de la Société mathématique polonaise. Ce titre me fournissait le plaisir et grand honneur d'être le guide de Lebesgue pendant son séjour.

Léopol est une ville ancienne, très intéressante du point de vue historique, et avant la seconde guerre elle était le seul siège épiscopal (sauf Jérusalem naturellement) des *trois* branches du Catholicisme — Romain, Grec et Arménien. La Cathédrale arménienne, peut-être la plus belle cathédrale de Pologne, intéressa Lebesgue plus que toutes les autres curiosités touristiques. Il m'a posé une infinité de questions sur l'histoire, l'architecture et l'origine de cette cathédrale, et il fut profondément déçu par mon ignorance en tous ces sujets.

D'autre part je fus déçu par son refus de parler de la mesure, de l'intégrale et toutes les autres questions de mathématique qui me semblaient beaucoup plus intéressantes que la Cathédrale arménienne. Le « generation gap » — brêche entre les générations — fut mis en évidence. Lebesgue restait patient et tolérant, mais il parlait avec un soupçon de tristesse de la jeunesse, qui ne s'intéresse pas au passé et n'apprécie pas l'histoire. Sans doute, il avait raison.

Une petite anecdote finale: Un jour notre section de la Société mathématique invita Lebesgue au Café Ecossais (Kawiarnia Szkocka) pour une petite réception. Le garçon, ignorant du fait que Lebesgue ne connaissait pas le Polonais, lui donna la carte de menu. Lebesgue étudia pendant trente secondes ce document formidable de descriptions longues et incompréhensibles, et avec sa politesse habituelle il dit: « Merci, je ne mange que des choses bien définies ».

A ce moment j'ai eu une inspiration, et en changeant un peu une phrase bien connue de Poincaré dirigée contre le Cantorisme, j'ai répondu: « Ne mangez jamais que des objets susceptibles d'être définis par un nombre fini de mots ».

« Ah » répliqua Lebesgue, « vous connaissez un peu la philosophie de Poincaré » — et à ce moment, je crois, il me pardonna mon ignorance totale de l'histoire de la Cathédrale arménienne.

(Reçu le 20 janvier 1975)

Marc Kac
The Rockefeller University
New York, N.Y., 10021