$$H_3(D_1, D_2) = \frac{\Phi_3(D_1, D_2)}{12} + \frac{11\, E^{(2)}_{D_1, D_2}(1) + 15\, E^{(2)}_{D_1, D_2}(2) + 8\, E^{(2)}_{D_1, D_2}(3)}{24} + \frac{E^{(\varepsilon)}_{D_1, D_2}(1)}{2}$$

$$H_5(D_1, D_2) = \frac{\Phi_5(D_1, D_2)}{30} + \frac{E^{(2)}_{D_1, D_2}(1)}{4} + \frac{E^{(3)}_{D_1, D_2}(1)}{3} + \frac{2\, E^{(5)}_{D_1, D_2}(1)}{5}.$$

Appendice:

Calcul des nombres de classes des ordres d'Eichler sur le corps des nombres rationnels

Nous avons calculé sur ordinateur les nombres H_{D_1,D_2}, T_{D_1,D_2}, $H^{+}_{D_1,D_2}$ pour les ordres d'Eichler d'invariant (D_1, D_2) sur le corps des nombres rationnels. Nous avons utilisé les résultats théoriques du chapitre 1.

D_1 désigne un produit d'un nombre impair de nombres premiers sans facteur carré,

D_2 désigne un produit de nombres premier sans facteur carré tel que $(D_1, D_2) = 1$.

s est le nombre de diviseurs premiers de $D_1 D_2$.

$h(-m)$ est le nombre de classes du corps quadratique imaginaire $\mathbf{Q}(\sqrt{-m})$, $d(-m)$ est son discriminant:

$$d(-m) = \begin{cases} -m & \text{si } m \equiv -1\,(4) \\ -4m & \text{si } m \not\equiv -1\,(4). \end{cases}$$

$E^{(m)}_{D_1, D_2} = \prod_{p \mid D_1} \left(1 - \left(\frac{d(-m)}{p}\right)\right) \prod_{p \mid D_2} \left(1 + \left(\frac{d(-m)}{p}\right)\right)$ est le symbole $E_{D_1,D_2}(O)$ correspondant à l'ordre maximal O de $\mathbf{Q}(\sqrt{-m})$.

$F^{(m)}_{D_1, D_2} = 2 \prod_{p \mid D_1} \left(1 - \left(\frac{d(-m)}{p}\right)\right) \prod_{\substack{p \mid D_2 \\ p \neq 2}} \left(1 + \left(\frac{d(-m)}{p}\right)\right)$ est le symbole correspondant à l'ordre de conducteur 2 de $\mathbf{Q}(\sqrt{-m})$ si D_2 est pair et $m \equiv 3\,(8)$.

On pose

$$\lambda(m) = \begin{cases} 1 & \text{si } m \not\equiv -1\,(4) \\ 2 & \text{si } m \equiv 7\,(8) \text{ ou si } m = 3 \\ 4 & \text{si } m \equiv 3\,(8) \text{ et } m \neq 3, \end{cases}$$

$$\kappa(m) = \begin{cases} \lambda(m) & \text{si } m \not\equiv 3(8) \text{ ou si } m = 3 \\ 3 & \text{si } m \equiv 3(8) \text{ et } m \neq 3\,. \end{cases}$$

On calcule facilement les nombres $p(m)$ pour $m \mid D_1 D_2$. On a

$$p(1) = \frac{1}{12}\left[\prod_{p \mid D_1}(p-1)\prod_{p \mid D_2}(p+1) + 3\,E^{(1)}_{D_1,D_2} + 4\,E^{(3)}_{D_1,D_2}\right],$$

$$2\,p(m) = \begin{cases} E^{(m)}_{D_1,D_2}\,h(-m) & \text{si } D_1 \text{ est pair} \\ E^{(m)}_{D_1,D_2}\,h(-m)\,\lambda(m) & \text{si } D_1 D_2 \text{ est impair} \\ F^{(m)}_{D_1,D_2}\,h(-m)\,\kappa(m) & \text{si } D_2 \text{ est pair.} \end{cases}$$

Nous obtenons les nombres H_{D_1,D_2}, T_{D_1,D_2}, $H^+_{D_1,D_2}$ en utilisant les formules (12) qui s'écrivent:

$$\begin{aligned} H_{D_1,D_2} &= p(1) \\ 2^s\,T_{D_1,D_2} &= \sum_{m \mid D_1 D_2} p(m) \\ 2^s\,H^+_{D_1,D_2} &= \sum_{m \mid D_1 D_2} (p(m))^2 \end{aligned}$$

Les tables de Pizer [9] donnent H_{D_1,D_2} et T_{D_1,D_2} pour $D_1 D_2 \leqslant 210$. Elles contiennent quelques erreurs

D_1	D_2		
5	23	$H = 8$	au lieu de 10
7	26	$T = 5$	au lieu de 6
17	10	$T = 5$	au lieu de 6
19	10	$T = 6$	au lieu de 7
3	70	$T = 3$	au lieu de 4

Si $k = \mathbf{Q}(\sqrt{10})$, $D_1 = 1$, $D_2 = 7$ on trouve $H_{1,7} = 64$ au lieu de 61 et $T_{1,7} = 18$ au lieu de 30. Si on calcule $H^+_{1,7}$ on a $H^+_{1,7} = 1040$.

Nous possédons les nombres de classes des idéaux à gauche H_{D_1,D_2}, le nombre de type d'ordres T_{D_1,D_2} et le nombre de classes des idéaux quasi-normaux $H^+_{D_1,D_2}$ pour les invariants (D_1, D_2), $D_1 < 47$ et $D_2 \leqslant 101$, $47 \leqslant D_1 \leqslant 101$ et $D_2 \leqslant 31$.

Mes remerciements chaleureux vont à H. Cohen qui a programmé ces opérations sur l'ordinateur du centre de calcul de Bordeaux.

Nous avons extrait des tables obtenues les ordres d'Eichler pour lesquels les nombres H_{D_1,D_2}, T_{D_1,D_2}, $H^+_{D_1,D_2}$ sont égaux à 1.

1. *Ordres tels que* $H^{+}_{D_1,D_2} = 1$

Il y en a 10 (à isomorphisme près)

D_1	D_2
2	1
	3
	5
	11
3	1
	2

D_1	D_2
5	1
	2
7	1
13	1

2. *Ordres tels que* $H_{D_1,D_2} = 1$

Ce sont les mêmes

3. *Ordres tels que* $T_{D_1,D_2} = 1$

Il faut rajouter les 10 invariants suivants:

D_1	D_2
2	7
	15
	23
3	5
	11

D_1	D_2
7	3
30	1
42	1
70	1
78	1

Pour tous ces ordres, nous avons $H_{D_1,D_2} = H^{+}_{D_1,D_2} = 1$.

Pour les autres ordres, les relations suivantes sont toujours vérifiées:

$$1 < T_{D_1,D_2} < H_{D_1,D_2} \leqslant H^{+}_{D_1,D_2} \leqslant T_{D_1,D_2} H_{D_1,D_2} .$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] Brown, K. S. Euler characteristics of discrete groups and G-spaces. *Invent. Math. (à paraître).*

[2] Dedekind, K. Über die Anzahl der Ideal-Klassen in den verschiedenen Ordnungen eines endlicher Körpers. *Gesammelte mathematische werke I.*

[3] Deuring, M. *Algebren.* Springer Verlag.

[4] Eichler, M. Zur Zahlentheorie der Quaternionen algebren. *J. reine angew. math. 195* (1955), pp. 127-151.