Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 21 (1975)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: NOMBRE DE CLASSES D'UN ORDRE D'EICHLER ET VALEUR AU POINT -1 DE LA FONCTION ZÊTA D'UN CORPS QUADRATIQUE RÉEL
Autor: Vigneras, Marie-France
Anhang: Appendice: Calcul des nombres de classes des ordres d'Eichler sur le corps des nombres rationnels
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-47331

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 13.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

$$H_3(D_1, D_2) = \frac{\Phi_3(D_1, D_2)}{12} + \frac{11\,E^{(2)}_{D_1, D_2}(1) + 15\,E^{(2)}_{D_1, D_2}(2) + 8\,E^{(2)}_{D_1, D_2}(3)}{24} + \frac{E^{(\varepsilon)}_{D_1, D_2}(1)}{2}$$

$$H_5(D_1, D_2) = \frac{\Phi_5(D_1, D_2)}{30} + \frac{E^{(2)}_{D_1, D_2}(1)}{4} + \frac{E^{(3)}_{D_1, D_2}(1)}{3} + \frac{2\,E^{(5)}_{D_1, D_2}(1)}{5}.$$

APPENDICE:

CALCUL DES NOMBRES DE CLASSES DES ORDRES D'EICHLER SUR LE CORPS DES NOMBRES RATIONNELS

Nous avons calculé sur ordinateur les nombres H_{D_1,D_2}, T_{D_1,D_2}, $H^{+}_{D_1,D_2}$ pour les ordres d'Eichler d'invariant (D_1, D_2) sur le corps des nombres rationnels. Nous avons utilisé les résultats théoriques du chapitre 1.

D_1 désigne un produit d'un nombre impair de nombres premiers sans facteur carré,

D_2 désigne un produit de nombres premier sans facteur carré tel que $(D_1, D_2) = 1$.

s est le nombre de diviseurs premiers de $D_1\,D_2$.

$h(-m)$ est le nombre de classes du corps quadratique imaginaire $\mathbf{Q}(\sqrt{-m})$, $d(-m)$ est son discriminant:

$$d(-m) = \begin{cases} -m & \text{si } m \equiv -1\,(4) \\ -4m & \text{si } m \not\equiv -1\,(4). \end{cases}$$

$E^{(m)}_{D_1, D_2} = \prod_{p \mid D_1} \left(1 - \left(\frac{d(-m)}{p}\right)\right) \prod_{p \mid D_2} \left(1 + \left(\frac{d(-m)}{p}\right)\right)$ est le symbole $E_{D_1,D_2}(O)$ correspondant à l'ordre maximal O de $\mathbf{Q}(\sqrt{-m})$.

$F^{(m)}_{D_1, D_2} = 2 \prod_{p \mid D_1} \left(1 - \left(\frac{d(-m)}{p}\right)\right) \prod_{\substack{p \mid D_2 \\ p \neq 2}} \left(1 + \left(\frac{d(-m)}{p}\right)\right)$ est le symbole correspondant à l'ordre de conducteur 2 de $\mathbf{Q}(\sqrt{-m})$ si D_2 est pair et $m \equiv 3\,(8)$.

On pose

$$\lambda(m) = \begin{cases} 1 & \text{si } m \not\equiv -1\,(4) \\ 2 & \text{si } m \equiv 7\,(8) \quad \text{ou si } m = 3 \\ 4 & \text{si } m \equiv 3\,(8) \quad \text{et} \quad m \neq 3, \end{cases}$$

$$\kappa(m) = \begin{cases} \lambda(m) & \text{si } m \not\equiv 3\,(8) \quad \text{ou si } m = 3 \\ 3 & \text{si } m \equiv 3\,(8) \quad \text{et} \quad m \neq 3\,. \end{cases}$$

On calcule facilement les nombres $p(m)$ pour $m \mid D_1 D_2$. On a

$$p(1) = \frac{1}{12}\left[\prod_{p \mid D_1}(p-1)\prod_{p \mid D_2}(p+1) + 3E^{(1)}_{D_1,D_2} + 4E^{(3)}_{D_1,D_2}\right],$$

$$2p(m) = \begin{cases} E^{(m)}_{D_1,D_2} h(-m) & \text{si } D_1 \text{ est pair} \\ E^{(m)}_{D_1,D_2} h(-m)\lambda(m) & \text{si } D_1 D_2 \text{ est impair} \\ F^{(m)}_{D_1,D_2} h(-m)\kappa(m) & \text{si } D_2 \text{ est pair.} \end{cases}$$

Nous obtenons les nombres H_{D_1,D_2}, T_{D_1,D_2}, $H^{+}_{D_1,D_2}$ en utilisant les formules (12) qui s'écrivent:

$$\begin{aligned} H_{D_1,D_2} &= p(1) \\ 2^s T_{D_1,D_2} &= \sum_{m \mid D_1 D_2} p(m) \\ 2^s H^{+}_{D_1,D_2} &= \sum_{m \mid D_1 D_2} (p(m))^2 \end{aligned}$$

Les tables de Pizer [9] donnent H_{D_1,D_2} et T_{D_1,D_2} pour $D_1 D_2 \leqslant 210$. Elles contiennent quelques erreurs

D_1	D_2		
5	23	$H = 8$	au lieu de 10
7	26	$T = 5$	au lieu de 6
17	10	$T = 5$	au lieu de 6
19	10	$T = 6$	au lieu de 7
3	70	$T = 3$	au lieu de 4

Si $k = \mathbf{Q}(\sqrt{10})$, $D_1 = 1$, $D_2 = 7$ on trouve $H_{1,7} = 64$ au lieu de 61 et $T_{1,7} = 18$ au lieu de 30. Si on calcule $H^{+}_{1,7}$ on a $H^{+}_{1,7} = 1040$.

Nous possédons les nombres de classes des idéaux à gauche H_{D_1,D_2}, le nombre de type d'ordres T_{D_1,D_2} et le nombre de classes des idéaux quasi-normaux $H^{+}_{D_1,D_2}$ pour les invariants (D_1, D_2), $D_1 < 47$ et $D_2 \leqslant 101$, $47 \leqslant D_1 \leqslant 101$ et $D_2 \leqslant 31$.

Mes remerciements chaleureux vont à H. COHEN qui a programmé ces opérations sur l'ordinateur du centre de calcul de Bordeaux.

Nous avons extrait des tables obtenues les ordres d'Eichler pour lesquels les nombres H_{D_1,D_2}, T_{D_1,D_2}, $H^{+}_{D_1,D_2}$ sont égaux à 1.

1. *Ordres tels que* $H^{+}_{D_1,D_2} = 1$

Il y en a 10 (à isomorphisme près)

D_1	D_2
2	1
	3
	5
	11
3	1
	2

D_1	D_2
5	1
	2
7	1
13	1

2. *Ordres tels que* $H_{D_1,D_2} = 1$

Ce sont les mêmes

3. *Ordres tels que* $T_{D_1,D_2} = 1$

Il faut rajouter les 10 invariants suivants:

D_1	D_2
2	7
	15
	23
3	5
	11

D_1	D_2
7	3
30	1
42	1
70	1
78	1

Pour tous ces ordres, nous avons $H_{D_1,D_2} = H^{+}_{D_1,D_2} = 1$.

Pour les autres ordres, les relations suivantes sont toujours vérifiées:

$$1 < T_{D_1,D_2} < H_{D_1,D_2} \leqslant H^{+}_{D_1,D_2} \leqslant T_{D_1,D_2} H_{D_1,D_2}.$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] BROWN, K. S. Euler characteristics of discrete groups and G-spaces. *Invent. Math. (à paraître)*.

[2] DEDEKIND, K. Über die Anzahl der Ideal-Klassen in den verschiedenen Ordnungen eines endlicher Körpers. *Gesammelte mathematische werke I.*

[3] DEURING, M. *Algebren.* Springer Verlag.

[4] EICHLER, M. Zur Zahlentheorie der Quaternionen algebren. *J. reine angew. math. 195* (1955), pp. 127-151.