

<b>Zeitschrift:</b>	L'Enseignement Mathématique
<b>Herausgeber:</b>	Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
<b>Band:</b>	21 (1975)
<b>Heft:</b>	1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE
 <b>Artikel:</b>	NOMBRE DE CLASSES D'UN ORDRE D'EICHLER ET VALEUR AU POINT -1 DE LA FONCTION ZÉTA D'UN CORPS QUADRATIQUE RÉEL
<b>Autor:</b>	Vigneras, Marie-France
<b>Kapitel:</b>	Chapitre 3. Nombre de classes d'un ordre d'eichler sur un corps quadratique
<b>DOI:</b>	<a href="https://doi.org/10.5169/seals-47331">https://doi.org/10.5169/seals-47331</a>

### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 21.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

Les congruences suivantes sont bien connues:

$$p \equiv 3(8) \quad h(-2p) \equiv 2(4) \quad \text{donc} \quad \frac{h(-2p)}{4} - \frac{h(-p)}{2} \in \mathbf{Z}$$

$$p \equiv -1(8) \quad h(-2p) \equiv 0(4) \quad \text{donc} \quad \frac{h(-2p)}{4} \in \mathbf{Z}$$

et nous obtenons:

COROLLAIRE 2.1. Soit  $p$  un nombre premier. Les quantités suivantes sont des entiers :

$$(23) \quad \begin{aligned} p \equiv 1(4) & \quad \frac{\zeta_p(-1)}{2} + \frac{h(-3p)}{6} + \frac{h(-p)}{8} \\ p \equiv 3(8) & \quad \frac{\zeta_p(-1)}{2} + \frac{h(-3p)}{6} + \frac{3}{4}h(-p) \\ p \equiv -1(8) & \quad \frac{\zeta_p(-1)}{2} + \frac{h(-3p)}{6} \end{aligned}$$

Ces nombres représentent la caractéristique d'Euler-Poincaré du groupe modulaire de  $k = \mathbf{Q}(\sqrt{p})$  calculée par Hirzebruch [8].

### CHAPITRE 3. NOMBRE DE CLASSES D'UN ORDRE D'EICHLER SUR UN CORPS QUADRATIQUE

On explicite la formule (16) du nombre de classes d'idéaux d'un ordre d'Eichler sur un corps quadratique.

Soit  $m$  un entier positif et  $k = \mathbf{Q}(\sqrt{m})$ ; on note respectivement  $R_m$ ,  $h(m)$ ,  $\zeta_m(-1)$ ,  $N_m(\cdot)$ , l'anneau des entiers, le nombre de classes, la valeur au point  $-1$  de la fonction zêta, la norme absolue du corps  $\mathbf{Q}(\sqrt{m})$ ; soit  $D_1$  un produit d'un nombre pair d'idéaux premiers distincts de  $\mathbf{Q}(\sqrt{m})$  et soit  $D_2$  un autre produit d'idéaux premiers distincts de  $\mathbf{Q}(\sqrt{m})$ , premier à  $D_1$ . Le nombre de classes des ordres d'Eichler sur  $\mathbf{Q}(\sqrt{m})$  d'invariant  $(D_1, D_2)$  est égal à

$$H = H_m(D_1, D_2) = \frac{h(m) \Phi_m(-1) \zeta_m(D_1, D_2)}{2} +$$

$$(24) \quad \sum_O \frac{w(O) - 1}{2 w(O)} E_{D_1, D_2}(O) h(O)$$

où on a posé

$$\Phi_m(D_1, D_2) = \prod_{\mathfrak{p} \mid D_1} (N\mathfrak{p} - 1) \prod_{\mathfrak{p} \mid D_2} (N\mathfrak{p} + 1);$$

la sommation porte sur les ordres  $O$  des extensions quadratiques totalement imaginaires de  $\mathbf{Q}(\sqrt{m})$  telles que l'indice  $w(O) = [O^* : R_m^*]$  soit supérieur à 1. Si  $m \neq 2, 3, 5$  l'ordre  $O$  est contenu dans  $k_2 = \mathbf{Q}(\sqrt{m}, \sqrt{-1})$ ,  $k_3 = \mathbf{Q}(\sqrt{m}, \sqrt{-3})$  ou  $k_\varepsilon = \mathbf{Q}(\sqrt{m}, \sqrt{-\varepsilon})$  si l'unité fondamentale  $\varepsilon$  est totalement positive, c'est-à-dire de norme +1; les corps  $k_3$  et  $k_\varepsilon$  sont confondus si l'indice des unités  $Q_3$  de  $k_3$  est égal à 2. Nous posons  $i = \sqrt{-1}$ ,  $\rho = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$  et nous notons  $Q_2$  l'indice des unités de  $k_2$ .

Nous rappelons d'abord quelques résultats sur l'indice des unités et sur le nombre de classes des corps biquadratiques imaginaires qui sont démontrés par H. Hasse [7].

### 1. Corps biquadratiques

**PROPOSITION 3.1.** *Si l'unité fondamentale  $\varepsilon$  de  $\mathbf{Q}(\sqrt{m})$  est totalement positive, le corps  $\mathbf{Q}(\sqrt{m}, \sqrt{-\varepsilon})$  est un corps biquadratique imaginaire  $\mathbf{Q}(\sqrt{m}, \sqrt{-n})$  où  $n = \text{Tr } \varepsilon - 2$  modulo les carrés. Le nombre de classes  $h_\varepsilon$  de  $\mathbf{Q}(\sqrt{m}, \sqrt{-n})$  est*

$$(25) \quad h_\varepsilon = h(m) h(-n) h(-n')$$

où  $nn' = m$  ou  $4m$ .

**PROPOSITION 3.2.** *Les corps biquadratiques imaginaires suivants ont un indice d'unités égal à 2 :*

$$\mathbf{Q}(\sqrt{-q_1}, \sqrt{-q_2}), \mathbf{Q}(\sqrt{-1}, \sqrt{-q}), \mathbf{Q}(\sqrt{-1}, \sqrt{-2q}), \mathbf{Q}(\sqrt{-2}, \sqrt{-q}), \\ \mathbf{Q}(\sqrt{-2}, \sqrt{-2q}).$$

où les nombres  $q, q_1, q_2$  sont premiers et congrus à 3 modulo 4.

**PROPOSITION 3.3.** *Le nombre de classes de  $\mathbf{Q}(\sqrt{m}, \sqrt{-1})$  est*

$$(26) \quad h_2 = \frac{Q_2}{2} h(m) h(-m).$$

Pour que  $Q_2$  soit égal à 2, il faut et il suffit qu'il existe une unité  $\eta$  vérifiant  $\eta^2 = \sqrt{-1}\varepsilon$ . Alors le conducteur de l'ordre  $R_m(1, \eta)$  est

$$\begin{aligned} f_\eta &= 1 \text{ si } m \equiv 2(4) \\ f_\eta &= p_2 \text{ si } m \equiv -1(4) \end{aligned}$$

On note  $p_q$  un idéal premier de  $(\mathbf{Q}\sqrt{m})$  au-dessus de  $q$ .

Si  $m \equiv 1(4)$  l'indice des unités  $Q_2$  est égal à 1. Le discriminant relatif  $d_2$  de  $\mathbf{Q}(\sqrt{m}, \sqrt{-1})$  sur  $\mathbf{Q}(\sqrt{m})$  est

$$d_2 = \begin{cases} 1 & \text{si } m \equiv -1(4) \\ 2 & \text{si } m \equiv 2(4) \\ 4 & \text{si } m \equiv 1(4) \end{cases}$$

Le conducteur de l'ordre  $R_m(1, \sqrt{-1})$  est

$$(27) \quad f_2 = \begin{cases} 1 & \text{si } m \equiv 1(4) \\ p_2 & \text{si } m \equiv 2(4) \\ 2 & \text{si } m \equiv -1(4) \end{cases}$$

**PROPOSITION 3.4.** *Le nombre de classes de  $\mathbf{Q}(\sqrt{m}, \sqrt{-3})$  est*

$$(28) \quad h_3 = \frac{Q_3}{2} h(m) h(-3m).$$

Pour que  $Q_3$  soit égal à 2, il faut et il suffit que  $\sqrt{-}\varepsilon$  appartienne à  $\mathbf{Q}(\sqrt{m}, \sqrt{-3})$ . Il est nécessaire que  $m \equiv 0(3)$ ; le conducteur de l'ordre  $R_m(1, \sqrt{-}\varepsilon)$  est

$$(29) \quad f_\varepsilon = 2$$

Le discriminant relatif  $d_3$  de  $\mathbf{Q}(\sqrt{m}, \sqrt{-3})$  sur  $\mathbf{Q}(\sqrt{m})$  est

$$d_3 = \begin{cases} 3 & \text{si } m \not\equiv 0(3) \\ 1 & \text{si } m \equiv 0(3) \end{cases}$$

Le conducteur de l'ordre  $R_m(1, \rho)$  est

$$(30) \quad f_3 = \begin{cases} 1 & \text{si } m \not\equiv 0 \pmod{3} \\ p_3 & \text{si } m \equiv 0 \pmod{3} \end{cases}$$

Nous supposons que  $m \neq 2, 3, 5$ . Nous calculons la somme  $\sum_O$  de la relation (16) en la décomposant en 2 ou 3 parties suivant le cas:

$$(31) \quad \sum_O = \sum_{O \subset k_2} + \sum_{O \subset k_3} + \sum_{O \subset k_\varepsilon}$$

le troisième terme de la somme pouvant disparaître éventuellement. Nous notons respectivement  $S_2, S_3, S_\varepsilon$  ces trois sommes.

## 2. Calcul de $S_2$

Par définition, on a

$$E_{D_1, D_2}(O) = \prod_{p|D_1} \left(1 - \frac{\{O\}}{p}\right) \prod_{p|D_2} \left(1 + \frac{\{O\}}{p}\right)$$

Ce nombre dépend de  $m, D_1, D_2$ , du corps  $\mathbf{Q}(\sqrt{m}, O)$  et des idéaux premiers divisant le conducteur  $f = f(O)$  de l'ordre  $O$  dans ce corps. Nous le noterons

$$E_{D_1, D_2}^{(i)}(f)$$

l'indice  $i$  étant égal à 2, 3 ou  $\varepsilon$ .

a) L'indice des unités  $Q_2$  est égal à 1.

Nous avons

$$S_2 = \sum_{O \subset k_2} \frac{w(O) - 1}{2w(O)} h(O) E_{D_1, D_2}(O) = \frac{1}{4} \sum_{i \in O} h(O) E_{D_1, D_2}(O)$$

Nous avons calculé dans le paragraphe précédent le conducteur de l'ordre  $R_m(1, i)$  et nous avons donné dans le premier chapitre la formule du nombre de classes  $h(0)$  qui s'écrit avec nos hypothèses

$$h(O) = \frac{h(m)h(-m)}{2} N_f(O) \prod_{p|f(O)} \left(1 - \frac{\left(\frac{k_2}{p}\right)}{Np}\right)$$

Si  $m \equiv 1 \pmod{4}$ , l'ordre  $R_m(1, i)$  est maximal donc on a:

$$(32) \quad S_2 = \frac{h(m)h(-m)}{8} E_{D_1, D_2}^{(2)}(1)$$

Si  $m \equiv 2 \pmod{4}$ , l'ordre  $R_m(1, i)$  a pour conducteur l'idéal premier  $\mathfrak{p}_2$  qui est ramifié dans  $k_2$ ; il a pour nombre de classes  $h(m) h(-m)$  et on a:

$$(33) \quad S_2 \equiv \frac{h(m) h(-m)}{8} [E_{D_1, D_2}^{(2)}(1) + 2 E_{D_1, D_2}^{(2)}(2)]$$

Si  $m \equiv -1 \pmod{8}$ , l'idéal premier  $\mathfrak{p}_2$  est décomposé dans  $k_2$ , l'ordre  $R_m(1, i)$  a pour conducteur 2 et pour nombre de classes  $h(m) h(-m)$ , l'ordre de conducteur  $\mathfrak{p}_2$  a pour nombre de classes  $\frac{h(m) h(-m)}{2}$ . On a :

$$(34) \quad S_2 = \frac{h(m) h(-m)}{8} [E_{D_1, D_2}^{(2)}(1) + 3 E_{D_1, D_2}^{(2)}(2)]$$

Si  $m \equiv 3 \pmod{8}$ , l'idéal premier  $\mathfrak{p}_2$  est inerte dans  $k_2$ ; les ordres de conducteur 2 et  $\mathfrak{p}_2$  ont pour nombre de classes  $3 h(m) h(-m)$  et  $\frac{3}{2} h(m) h(-m)$  respectivement. On a

$$(35) \quad S_2 = \frac{h(m) h(-m)}{8} [E_{D_1, D_2}^{(2)}(1) + 9 E_{D_1, D_2}^{(2)}(2)]$$

b) L'indice des unités  $Q_2$  est égal à 2.

Comme  $i \in R_m(1, \eta)$  nous avons:

$$\begin{aligned} S_2 &= \sum_{O \subset k_2} \frac{w(O) - 1}{2 w(O)} h(O) E_{D_1, D_2}(O) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i \in O \\ \eta \notin O}} \frac{h(O)}{w(O)} E_{D_1, D_2}(O) \\ &\quad + \frac{3}{2} \sum_{\eta \in O} \frac{h(O)}{w(O)} E_{D_1, D_2}(O). \end{aligned}$$

On a

$$\frac{h(O)}{w(O)} = \frac{h(m) h(-m)}{4} N f(O) \prod_{\mathfrak{p} \mid f(O)} \left( 1 - \frac{\left(\frac{k_2}{\mathfrak{p}}\right)}{N\mathfrak{p}} \right)$$

Nous obtenons facilement les formules suivantes:

Si  $m \equiv 2 \pmod{4}$

$$(36) \quad S_2 = \frac{h(m) h(-m)}{8} [3 E_{D_1, D_2}^{(2)}(1) + 2 E_{D_1, D_2}^{(2)}(2)]$$

Si  $m \equiv -1 \pmod{8}$

$$(37) \quad S_2 = \frac{h(m)h(-m)}{8} [3E_{D_1,D_2}^{(2)}(1) + 5E_{D_1,D_2}^{(2)}(2)]$$

Si  $m \equiv 3 \pmod{8}$

$$(38) \quad S_2 = \frac{h(m)h(-m)}{8} [3E_{D_1,D_2}^{(2)}(1) + 15E_{D_1,D_2}^{(2)}(2)]$$

### 3. Calcul de $S_3$

a) L'indice des unités  $Q_3$  est égal à 1.

Si  $O$  est un ordre contenu dans  $k_3$ , il vérifie :

$$\frac{h(O)}{w(O)} = \frac{h(m)h(-3m)}{6} Nf(O) \prod_{\mathfrak{p}|f(O)} \left( 1 - \frac{\left(\frac{k_3}{\mathfrak{p}}\right)}{N\mathfrak{p}} \right)$$

Nous avons

$$S_3 = \sum_{O \subset k_3} \frac{h(O)}{w(O)} E_{D_1,D_2}(O)$$

Si  $m \not\equiv 0 \pmod{3}$ , l'ordre  $R_m(1, \rho)$  est maximal donc on a :

$$(39) \quad S_3 = \frac{h(m)h(-3m)}{6} E_{D_1,D_2}^{(3)}(1)$$

Si  $m \equiv 6 \pmod{9}$ , l'ordre  $R_m(1, \rho)$  a pour conducteur l'idéal  $\mathfrak{p}_3$  qui est décomposé dans  $k_3$ . On a

$$(40) \quad S_3 = \frac{h(m)h(-3m)}{6} [E_{D_1,D_2}^{(3)}(1) + 2E_{D_1,D_2}^{(3)}(3)]$$

Si  $m \equiv 3 \pmod{9}$ , l'ordre  $R_m(1, \rho)$  a pour conducteur l'idéal  $\mathfrak{p}_3$  qui est inerte dans  $k_3$ . On a

$$(41) \quad S_3 = \frac{h(m)h(-3m)}{6} [E_{D_1,D_2}^{(3)}(1) + 4E_{D_1,D_2}^{(3)}(3)]$$

b) L'indice des unités  $Q_3$  est égal à 2.

C'est le cas où  $k_3 = k_\varepsilon$ . Les ordres  $R_m(1, \rho)$  et  $R_m(1, \sqrt{-\varepsilon})$  ont pour conducteur  $\mathfrak{p}_3$  et 2.

La somme sur les ordres  $O \subset k_3$  s'écrit

$$S_3 = \frac{5}{2} \sum_{\substack{\rho \in O \\ \sqrt{-\varepsilon} \in O}} \frac{h(O)}{w(O)} E_{D_1, D_2}(O) + \sum_{\substack{\rho \in O \\ \sqrt{-\varepsilon} \notin O}} \frac{h(O)}{w(O)} E_{D_1, D_2}(O)$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{\substack{\eta \in O \\ \eta \neq O}} \frac{h(O)}{w(O)} E_{D_1, D_2}(O)$$

On peut écrire cette formule sous la forme suivante:

$$(42) \quad S_3 = \frac{h(m) h(-3m)}{12} [5 E_{D_1, D_2}^{(3)}(1) + 2b E_{D_1, D_2}^{(3)}(3) + c E_{D_1, D_2}^{(3)}(2)]$$

où

$$b = N p_3 \left( 1 - \frac{\left(\frac{k_3}{p_3}\right)}{N p_3} \right) \quad \text{et} \quad c = \sum_{\substack{f|2 \\ f \neq 1}} N f \prod_{p|f} \left( 1 - \frac{\left(\frac{k_3}{p}\right)}{N p} \right)$$

On calcule facilement  $b$  et  $c$ . On a

$$(43) \quad b = \begin{cases} 4 & \text{si } m \equiv 3(9) \\ 2 & \text{si } m \equiv 6(9) \end{cases}$$

$$c = \begin{cases} 9 & \text{si } m \not\equiv 1(4) \\ 15 & \text{si } m \equiv 1(8) \\ 3 & \text{si } m \equiv 5(8) \end{cases}$$

#### 4. Calcul de $S_\varepsilon$

Si  $k_\varepsilon \neq k_3$  il nous reste à calculer un terme pour avoir la valeur  $H$  du nombre de classes. On a

$$S_\varepsilon = \sum_{\sqrt{-\varepsilon} \in O} \frac{w(O) - 1}{2 w(O)} h(O) E_{D_1, D_2}(O) = \frac{h(m) h(-n) h(-n')}{4} c(m)$$

où  $c(m)$  est un entier que l'on déterminera dans chaque cas. Il est défini par la formule suivante:

$$(44) \quad c(m) = E_{D_1, D_2}^{(\varepsilon)}(1) + \sum_{\substack{f|f_3 \\ f \neq 1}} E_{D_1, D_2}^{(\varepsilon)}(f) N f \prod_{p|f} \left( 1 - \frac{\left(\frac{k_\varepsilon}{p}\right)}{N p} \right)$$

5. Cas particuliers :  $m = 2, 3, 5$ .

Il nous reste à examiner ces trois cas. Si  $m = 2$ , la norme de l'unité fondamentale étant  $-1$ , les indices d'unités sont égaux à  $1$ ; il n'existe pas de somme  $S_\varepsilon$ , la somme  $S_3$  est donnée par la formule (39), la somme  $S_2$  est exceptionnelle car  $k_2 = \mathbf{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{-1})$  contient une unité d'ordre 8. On a :

$$(45) \quad S_2 = \frac{3}{8} E_{D_1, D_2}^{(2)}(1) + \frac{1}{4} E_{D_1, D_2}^{(2)}(2)$$

Si  $m = 3$ , l'unité fondamentale  $\varepsilon$  est totalement positive et égale à  $\varepsilon = \frac{(1+\sqrt{3})^2}{2}$ . Le corps  $k_\varepsilon$  est  $\mathbf{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{-2})$ ; l'ordre  $R_3(1, \sqrt{-\varepsilon})$  est maximal, donc on a :

$$(46) \quad S_\varepsilon = \frac{h(3)h(-2)h(-6)}{4} E_{D_1, D_2}^{(\varepsilon)}(1) = \frac{1}{2} E_{D_1, D_2}^{(\varepsilon)}(1)$$

Les sommes  $S_2$  et  $S_3$  sont exceptionnelles car  $k_2 = k_3 = \mathbf{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{-1}) = \mathbf{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{-3})$ . Les ordres  $O$  contenus dans  $k_2$  tels que  $w(O) \neq 0$  sont donnés dans le tableau suivant :

$f(O)$	1	$\mathfrak{p}_2$	2	$\mathfrak{p}_3$
$w(O)$	12	4	2	3
$h(O)$	1	1	1	1

Nous en déduisons facilement la valeur de  $S_2$ :

$$(47) \quad S_2 = \frac{11}{24} E_{D_1, D_2}^{(2)}(1) + \frac{5}{8} E_{D_1, D_2}^{(2)}(2) + \frac{1}{3} E_{D_1, D_2}^{(2)}(3)$$

Si  $m = 5$ , la norme de l'unité fondamentale est  $-1$  et les sommes  $S_2, S_3$  sont données par les formules (32), (39). Mais  $\mathbf{Q}(\sqrt{5})$  est le sous-corps réel

maximal du 5-ème corps cyclotomique  $k_5$  et la formule (31) doit être remplacée par:

$$(48) \quad \sum_{O} = \sum_{O \subset k_2} + \sum_{O \subset k_3} + \sum_{O \subset k_5}$$

Il est facile de calculer la somme  $S_5$  ainsi introduite:

$$(49) \quad S_5 = \frac{2}{5} E_{D_1, D_2}^{(5)}(1)$$

## 6. Théorèmes

Tous les calculs de ce chapitre ont été effectués pour obtenir les résultats suivants:

**THÉORÈME 3.1.** *Le nombre de classes d'un ordre d'Eichler d'invariant  $(D_1, D_2)$  sur un corps quadratique  $\mathbf{Q}(\sqrt{m})$ , où  $m$  est un entier positif sans facteur carré et différent de 2, 3, 5, est égal à*

$$(50) \quad H_m(D_1, D_2) = h(m) \left[ \frac{\zeta_m(-1) \Phi_m(D_1, D_2)}{2} + \frac{h(-m)}{8} a(m) + \frac{h(-3m)}{12} b(m) + \frac{h(-n)h(-n')}{4} c(m) \right],$$

où les nombres entiers  $a(m)$ ,  $b(m)$ ,  $c(m)$  sont déterminés par les relations

$$S_2 = \frac{h(m)h(-m)}{8} a(m)$$

$$S_3 = \frac{h(m)h(-3m)}{12} b(m)$$

$$S_\varepsilon = \frac{h(m)h(-n)h(-n')}{4} c(m)$$

**THÉOREME 3.2.** *Le nombre de classes des ordres d'Eichler d'invariant  $(D_1, D_2)$  sur les corps  $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$ ,  $\mathbf{Q}(\sqrt{3})$ ,  $\mathbf{Q}(\sqrt{5})$  est respectivement égal à*

$$(51) \quad H_2(D_1, D_2) = \frac{\Phi_2(D_1, D_2)}{24} + \frac{3E_{D_1, D_2}^{(2)}(1)}{8} + \frac{2E_{D_1, D_2}^{(2)}(2)}{8} + \frac{E_{D_1, D_2}^{(3)}(1)}{3}$$

$$H_3(D_1, D_2) = \frac{\Phi_3(D_1, D_2)}{12} + \frac{11 E_{D_1, D_2}^{(2)}(1) + 15 E_{D_1, D_2}^{(2)}(2) + 8 E_{D_1, D_2}^{(2)}(3)}{24} \\ + \frac{E_{D_1, D_2}^{(\varepsilon)}(1)}{2}$$

$$H_5(D_1, D_2) = \frac{\Phi_5(D_1, D_2)}{30} + \frac{E_{D_1, D_2}^{(2)}(1)}{4} + \frac{E_{D_1, D_2}^{(3)}(1)}{3} + \frac{2 E_{D_1, D_2}^{(5)}(1)}{5}.$$

### APPENDICE:

#### CALCUL DES NOMBRES DE CLASSES DES ORDRES D'EICHLER SUR LE CORPS DES NOMBRES RATIONNELS

Nous avons calculé sur ordinateur les nombres  $H_{D_1, D_2}$ ,  $T_{D_1, D_2}$ ,  $H_{D_1, D_2}^+$  pour les ordres d'Eichler d'invariant  $(D_1, D_2)$  sur le corps des nombres rationnels. Nous avons utilisé les résultats théoriques du chapitre 1.

$D_1$  désigne un produit d'un nombre impair de nombres premiers sans facteur carré,

$D_2$  désigne un produit de nombres premier sans facteur carré tel que  $(D_1, D_2) = 1$ .

$s$  est le nombre de diviseurs premiers de  $D_1 D_2$ .

$h(-m)$  est le nombre de classes du corps quadratique imaginaire  $\mathbf{Q}(\sqrt{-m})$ ,  $d(-m)$  est son discriminant:

$$d(-m) = \begin{cases} -m & \text{si } m \equiv -1(4) \\ -4m & \text{si } m \not\equiv -1(4). \end{cases}$$

$E_{D_1, D_2}^{(m)} = \prod_{p|D_1} \left(1 - \left(\frac{d(-m)}{p}\right)\right) \prod_{p|D_2} \left(1 + \left(\frac{d(-m)}{p}\right)\right)$  est le symbole  $E_{D_1, D_2}(O)$  correspondant à l'ordre maximal  $O$  de  $\mathbf{Q}(\sqrt{-m})$ .

$F_{D_1, D_2}^{(m)} = 2 \prod_{p|D_1} \left(1 - \left(\frac{d(-m)}{p}\right)\right) \prod_{\substack{p|D_2 \\ p \neq 2}} \left(1 + \left(\frac{d(-m)}{p}\right)\right)$  est le symbole

correspondant à l'ordre de conducteur 2 de  $\mathbf{Q}(\sqrt{-m})$  si  $D_2$  est pair et  $m \equiv 3(8)$ .

On pose

$$\lambda(m) = \begin{cases} 1 & \text{si } m \not\equiv -1(4) \\ 2 & \text{si } m \equiv 7(8) \text{ ou si } m = 3 \\ 4 & \text{si } m \equiv 3(8) \text{ et } m \neq 3, \end{cases}$$