Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 21 (1975)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: NOMBRE DE CLASSES D'UN ORDRE D'EICHLER ET VALEUR AU POINT -1 DE LA FONCTION ZÊTA D'UN CORPS QUADRATIQUE RÉEL

Autor: Vigneras, Marie-France

Kapitel: Chapitre 3. Nombre de classes d'un ordre d'eichler sur un corps quadratique

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-47331

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 09.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Les congruences suivantes sont bien connues:

$$p \equiv 3\,(8) \qquad h(-2p) \equiv 2\,(4) \quad \text{donc} \quad \frac{h(-2p)}{4} - \frac{h(-p)}{2} \in \mathbf{Z}$$

$$p \equiv -1\,(8) \qquad h(-2p) \equiv 0\,(4) \quad \text{donc} \quad \frac{h(-2p)}{4} \in \mathbf{Z}$$

et nous obtenons:

COROLLAIRE 2.1. *Soit p un nombre premier. Les quantités suivantes sont des entiers :*

$$p \equiv 1\,(4) \qquad \frac{\zeta_p(-1)}{2} + \frac{h(-3p)}{6} + \frac{h(-p)}{8}$$

$$(23) \quad p \equiv 3\,(8) \qquad \frac{\zeta_p(-1)}{2} + \frac{h(-3p)}{6} + \frac{3}{4}\,h(-p)$$

$$p \equiv -1\,(8) \qquad \frac{\zeta_p(-1)}{2} + \frac{h(-3p)}{6}$$

Ces nombres représentent la caractéristique d'Euler-Poincaré du groupe modulaire de $k = \mathbf{Q}(\sqrt{p})$ calculée par Hirzebruch [8].

CHAPITRE 3. NOMBRE DE CLASSES D'UN ORDRE D'EICHLER SUR UN CORPS QUADRATIQUE

On explicite la formule (16) du nombre de classes d'idéaux d'un ordre d'Eichler sur un corps quadratique.

Soit m un entier positif et $k = \mathbf{Q}(\sqrt{m})$; on note respectivement R_m, $h(m)$, $\zeta_m(-1)$, $N_m(.)$, l'anneau des entiers, le nombre de classes, la valeur au point -1 de la fonction zêta, la norme absolue du corps $\mathbf{Q}(\sqrt{m})$; soit D_1 un produit d'un nombre pair d'idéaux premiers distincts de $\mathbf{Q}(\sqrt{m})$ et soit D_2 un autre produit d'idéaux premiers distincts de $\mathbf{Q}(\sqrt{m})$, premier à D_1. Le nombre de classes des ordres d'Eichler sur $\mathbf{Q}(\sqrt{m})$ d'invariant (D_1, D_2) est égal à

$$H = H_m(D_1, D_2) = \frac{h(m)\,\Phi_m(-1)\,\zeta_m(D_1, D_2)}{2} +$$

$$(24) \qquad \sum_{O} \frac{w(O)-1}{2\,w(O)} E_{D_1,D_2}(O)\,h(O)$$

où on a posé

$$\Phi_m(D_1, D_2) = \prod_{\mathfrak{p}\mid D_1} (N\mathfrak{p}-1) \prod_{\mathfrak{p}\mid D_2} (N\mathfrak{p}+1)\,;$$

la sommation porte sur les ordres O des extensions quadratiques totalement imaginaires de $\mathbf{Q}(\sqrt{m})$ telles que l'indice $w(O) = [O^* : R_m^*]$ soit supérieur à 1. Si $m \neq 2, 3, 5$ l'ordre O est contenu dans $k_2 = \mathbf{Q}(\sqrt{m}, \sqrt{-1})$, $k_3 = \mathbf{Q}(\sqrt{m}, \sqrt{-3})$ ou $k_\varepsilon = \mathbf{Q}(\sqrt{m}, \sqrt{-\varepsilon})$ si l'unité fondamentale ε est totalement positive, c'est-à-dire de norme $+1$; les corps k_3 et k_ε sont confondus si l'indice des unités Q_3 de k_3 est égal à 2. Nous posons $i = \sqrt{-1}$, $\rho = \dfrac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ et nous notons Q_2 l'indice des unités de k_2.

Nous rappelons d'abord quelques résultats sur l'indice des unités et sur le nombre de classes des corps biquadratiques imaginaires qui sont démontrés par H. Hasse [7].

1. *Corps biquadratiques*

PROPOSITION 3.1. *Si l'unité fondamentale ε de $\mathbf{Q}(\sqrt{m})$ est totalement positive, le corps $\mathbf{Q}(\sqrt{m}, \sqrt{-\varepsilon})$ est un corps biquadratique imaginaire $\mathbf{Q}(\sqrt{m}, \sqrt{-n})$ où $n = \mathrm{Tr}\,\varepsilon - 2$ modulo les carrés. Le nombre de classes h_ε de $\mathbf{Q}(\sqrt{m}, \sqrt{-n})$ est*

$$(25) \qquad h\varepsilon = h(m)\,h(-n)\,h(-n')$$

où $nn' = m$ ou $4m$.

PROPOSITION 3.2. *Les corps biquadratiques imaginaires suivants ont un indice d'unités égal à 2 :*

$\mathbf{Q}(\sqrt{-q_1}, \sqrt{-q_2})$, $\mathbf{Q}(\sqrt{-1}, \sqrt{-q})$, $\mathbf{Q}(\sqrt{-1}, \sqrt{-2q})$, $\mathbf{Q}(\sqrt{-2}, \sqrt{-q})$, $\mathbf{Q}(\sqrt{-2}, \sqrt{-2q})$.

où les nombres q, q_1, q_2 sont premiers et congrus à 3 modulo 4.

PROPOSITION 3.3. *Le nombre de classes de* $\mathbf{Q}(\sqrt{m}, \sqrt{-1})$ *est*

$$h_2 = \frac{Q_2}{2} h(m) h(-m) . \tag{26}$$

Pour que Q_2 soit égal à 2, il faut et il suffit qu'il existe une unité η vérifiant $\eta^2 = \sqrt{-1}\,\varepsilon$. Alors le conducteur de l'ordre $R_m(1, \eta)$ est

$$f_\eta = 1 \quad \text{si } m \equiv 2\,(4)$$
$$f_\eta = \mathfrak{p}_2 \quad \text{si } m \equiv -1\,(4)$$

On note $\mathfrak{p}_q$ un idéal premier de $(\mathbf{Q}\sqrt{m})$ au-dessus de q.

Si $m \equiv 1\ (4)$ l'indice des unités Q_2 est égal à 1. Le discriminant relatif d_2 de $\mathbf{Q}(\sqrt{m}, \sqrt{-1})$ sur $\mathbf{Q}(\sqrt{m})$ est

$$d_2 = \begin{cases} 1 & \text{si } m \equiv -1\,(4) \\ 2 & \text{si } m \equiv 2\,(4) \\ 4 & \text{si } m \equiv 1\,(4) \end{cases}$$

Le conducteur de l'ordre $R_m(1, \sqrt{-1})$ est

$$f_2 = \begin{cases} 1 & \text{si } m \equiv 1\,(4) \\ \mathfrak{p}_2 & \text{si } m \equiv 2\,(4) \\ 2 & \text{si } m \equiv -1\,(4) \end{cases} \tag{27}$$

PROPOSITION 3.4. *Le nombre de classes de* $\mathbf{Q}(\sqrt{m}, \sqrt{-3})$ *est*

$$h_3 = \frac{Q_3}{2} h(m) h(-3m) . \tag{28}$$

Pour que Q_3 soit égal à 2, il faut et il suffit que $\sqrt{-\varepsilon}$ appartienne à $\mathbf{Q}(\sqrt{m}, \sqrt{-3})$, Il est nécessaire que $m \equiv 0\ (3)$; le conducteur de l'ordre $R_m(1, \sqrt{-\varepsilon})$ est

$$f_\varepsilon = 2 \tag{29}$$

Le discriminant relatif d_3 de $\mathbf{Q}(\sqrt{m}, \sqrt{-3})$ sur $\mathbf{Q}(\sqrt{m})$ est

$$d_3 = \begin{cases} 3 & \text{si } m \not\equiv 0\,(3) \\ 1 & \text{si } m \equiv 0\,(3) \end{cases}$$

Le conducteur de l'ordre $R_m(1, \rho)$ est

(30) $$f_3 = \begin{cases} 1 & \text{si } m \not\equiv 0\,(3) \\ \mathfrak{p}_3 & \text{si } m \equiv 0\,(3) \end{cases}$$

Nous supposons que $m \neq 2, 3, 5$. Nous calculons la somme $\sum_{O}$ de la relation (16) en la décomposant en 2 ou 3 parties suivant le cas:

(31) $$\sum_{O} = \sum_{O \subset k_2} + \sum_{O \subset k_3} + \sum_{O \subset k_\varepsilon}$$

le troisième terme de la somme pouvant disparaître éventuellement. Nous notons respectivement S_2, S_3, S_ε ces trois sommes.

2. *Calcul de* S_2

Par définition, on a

$$E_{D_1,D_2}(O) = \prod_{\mathfrak{p} \mid D_1} \left(1 - \left\{\frac{O}{\mathfrak{p}}\right\}\right) \prod_{\mathfrak{p} \mid D_2} \left(1 + \left\{\frac{O}{\mathfrak{p}}\right\}\right)$$

Ce nombre dépend de m, D_1, D_2, du corps $\mathbf{Q}(\sqrt{m}, O)$ et des idéaux premiers divisant le conducteur $f = f(O)$ de l'ordre O dans ce corps. Nous le noterons

$$E^{(i)}_{D_1,D_2}(f)$$

l'indice i étant égal à 2, 3 ou ε.

a) *L'indice des unités* Q_2 *est égal à* 1.

Nous avons

$$S_2 = \sum_{O \subset k_2} \frac{w(O) - 1}{2\,w(O)} h(O)\, E_{D_1,D_2}(O) = \frac{1}{4} \sum_{i \in O} h(O)\, E_{D_1,D_2}(O)$$

Nous avons caclulé dans le paragraphe précédent le conducteur de l'ordre $R_m(1, i)$ et nous avons donné dans le premier chapitre la formule du nombre de classes $h(0)$ qui s'écrit avec nos hypothèses

$$h(O) = \frac{h(m)\,h(-m)}{2} N f(O) \prod_{\mathfrak{p} \mid f(O)} \left(1 - \frac{\left(\frac{k_2}{\mathfrak{p}}\right)}{N\mathfrak{p}}\right)$$

Si $m \equiv 1\ (4)$, l'ordre $R_m(1, i)$ est maximal donc on a:

(32) $$S_2 = \frac{h(m)\,h(-m)}{8} E^{(2)}_{D_1,D_2}(1)$$

Si $m \equiv 2\ (4)$, l'ordre $R_m(1, i)$ a pour conducteur l'idéal premier $\mathfrak{p}_2$ qui est ramifié dans k_2; il a pour nombre de classes $h(m)\, h(-m)$ et on a:

$$(33) \qquad S_2 \equiv \frac{h(m)\, h(-m)}{8} \left[E^{(2)}_{D_1, D_2}(1) + 2\, E^{(2)}_{D_1, D_2}(2)\right]$$

Si $m \equiv -1\ (8)$, l'idéal premier $\mathfrak{p}_2$ est décomposé dans k_2, l'ordre $R_m(1, i)$ a pour conducteur 2 et pour nombre de classes $h(m)\, h(-m)$, l'ordre de conducteur $\mathfrak{p}_2$ a pour nombre de classes $\dfrac{h(m)\, h(-m).}{2}$ On a:

$$(34) \qquad S_2 = \frac{h(m)\, h(-m)}{8} \left[E^{(2)}_{D_1, D_2}(1) + 3\, E^{(2)}_{D_1, D_2}(2)\right]$$

Si $m \equiv 3\ (8)$, l'idéal premier $\mathfrak{p}_2$ est inerte dans k_2; les ordres de conducteur 2 et $\mathfrak{p}_2$ ont pour nombre de classes $3\, h(m)\, h(-m)$ et $\dfrac{3}{2}\, h(m)\, h(-m)$ respectivement. On a

$$(35) \qquad S_2 = \frac{h(m)\, h(-m)}{8} \left[E^{(2)}_{D_1, D_2}(1) + 9\, E^{(2)}_{D_1, D_2}(2)\right]$$

b) *L'indice des unités Q_2 est égal à* 2.

Comme $i \in R_m(1, \eta)$ nous avons:

$$S_2 = \sum_{O \subset k_2} \frac{w(O) - 1}{2\, w(O)}\, h(O)\, E_{D_1, D_2}(O) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i \in O \\ \eta \notin O}} \frac{h(O)}{w(O)}\, E_{D_1, D_2}(O)$$

$$+ \frac{3}{2} \sum_{\eta \in O} \frac{h(O)}{w(O)}\, E_{D_1, D_2}(O)\,.$$

On a

$$\frac{h(O)}{w(O)} = \frac{h(m)\, h(-m)}{4}\, N f(O) \prod_{\mathfrak{p} \mid f(O)} \left(1 - \frac{\left(\dfrac{k_2}{\mathfrak{p}}\right)}{N\mathfrak{p}}\right)$$

Nous obtenons facilement les formules suivantes:

Si $m \equiv 2\ (4)$

$$(36) \qquad S_2 = \frac{h(m)\, h(-m)}{8} \left[3\, E^{(2)}_{D_1, D_2}(1) + 2\, E_{D_1, D_2}(2)\right]$$

Si $m \equiv -1\ (8)$

$$S_2 = \frac{h(m)\,h(-m)}{8}\left[3\,E^{(2)}_{D_1,D_2}(1) + 5\,E^{(2)}_{D_1,D_2}(2)\right] \tag{37}$$

Si $m \equiv 3\ (8)$

$$S_2 = \frac{h(m)\,h(-m)}{8}\left[3\,E^{(2)}_{D_1,D_2}(1) + 15\,E^{(2)}_{D_1,D_2}(2)\right] \tag{38}$$

3. *Calcul de* S_3

a) *L'indice des unités* Q_3 *est égal à* 1.

Si O est un ordre contenu dans k_3, il vérifie:

$$\frac{h(O)}{w(O)} = \frac{h(m)\,h(-3m)}{6}\,N f\,(O) \prod_{\mathfrak{p}\mid f(O)} \left(1 - \frac{\left(\frac{k_3}{\mathfrak{p}}\right)}{N\mathfrak{p}}\right)$$

Nous avons

$$S_3 = \sum_{O \subset k_3} \frac{h(O)}{w(O)}\,E_{D_1,D_2}(O)$$

Si $m \not\equiv 0\ (3)$, l'ordre $R_m(1, \rho)$ est maximal donc on a:

$$S_3 = \frac{h(m)\,h(-3m)}{6}\,E^{(3)}_{D_1,D_2}(1) \tag{39}$$

Si $m \equiv 6\ (9)$, l'ordre $R_m(1, \rho)$ a pour conducteur l'idéal $\mathfrak{p}_3$ qui est décomposé dans k_3. On a

$$S_3 = \frac{h(m)\,h(-3m)}{6}\left[E^{(3)}_{D_1,D_2}(1) + 2\,E^{(3)}_{D_1,D_2}(3)\right] \tag{40}$$

Si $m \equiv 3\ (9)$, l'ordre $R_m(1, \rho)$ a pour conducteur l'idéal $\mathfrak{p}_3$ qui est inerte dans k_3. On a

$$S_3 = \frac{h(m)\,h(-3m)}{6}\left[E^{(3)}_{D_1,D_2}(1) + 4\,E^{(3)}_{D_1,D_2}(3)\right] \tag{41}$$

b) *L'indice des unités* Q_3 *est égal à* 2.

C'est le cas où $k_3 = k_\varepsilon$. Les ordres $R_m(1, \rho)$ et $R_m(1, \sqrt{-\varepsilon})$ ont pour conducteur $\mathfrak{p}_3$ et 2.

La somme sur les ordres $O \subset k_3$ s'écrit

$$S_3 = \frac{5}{2} \sum_{\substack{\rho \in O \\ \sqrt{-\varepsilon} \in O}} \frac{h(O)}{w(O)} E_{D_1,D_2}(O) + \sum_{\substack{\rho \in O \\ \sqrt{-\varepsilon} \notin O}} \frac{h(O)}{w(O)} E_{D_1,D_2}(O)$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{\substack{\sqrt{-\varepsilon} \in O \\ \eta \notin O}} \frac{h(O)}{w(O)} E_{D_1,D_2}(O)$$

On peut écrire cette formule sous la forme suivante:

$$(42) \qquad S_3 = \frac{h(m)\,h(-3m)}{12} \left[5\, E^{(3)}_{D_1,D_2}(1) + 2\, b\, E^{(3)}_{D_1,D_2}(3) + c\, E^{(3)}_{D_1,D_2}(2)\right]$$

où

$$b = N\mathfrak{p}_3 \left(1 - \frac{\left(\frac{k_3}{\mathfrak{p}_3}\right)}{N\mathfrak{p}_3}\right) \quad \text{et} \quad c = \sum_{\substack{f \mid 2 \\ f \neq 1}} N f \prod_{\mathfrak{p} \mid f} \left(1 - \frac{\left(\frac{k_3}{\mathfrak{p}}\right)}{N\mathfrak{p}}\right)$$

On calcule facilement b et c. On a

$$(43) \qquad b = \begin{cases} 4 \text{ si } m \equiv 3\,(9) \\ 2 \text{ si } m \equiv 6\,(9) \end{cases}$$

$$c = \begin{cases} 9 \text{ si } m \not\equiv 1\,(4) \\ 15 \text{ si } m \equiv 1\,(8) \\ 3 \text{ si } m \equiv 5\,(8) \end{cases}$$

4. *Calcul de* S_ε

Si $k_\varepsilon \neq k_3$ il nous reste à calculer un terme pour avoir la valeur H du nombre de classes. On a

$$S_\varepsilon = \sum_{\sqrt{-\varepsilon} \in O} \frac{w(O) - 1}{2\, w(O)} h(O)\, E_{D_1,D_2}(O) = \frac{h(m)\,h(-n)\,h(-n')}{4}\, c(m)$$

où $c(m)$ est un entier que l'on déterminera dans chaque cas. Il est défini par la formule suivante:

$$(44) \qquad c(m) = E^{(\varepsilon)}_{D_1,D_2}(1) + \sum_{\substack{f \mid f_3 \\ f \neq 1}} E^{(\varepsilon)}_{D_1,D_2}(f)\, N f \prod_{\mathfrak{p} \mid f} \left(1 - \frac{\left(\frac{k_\varepsilon}{\mathfrak{p}}\right)}{N\mathfrak{p}}\right)$$

5. *Cas particuliers : $m = 2, 3, 5$.*

Il nous reste à examiner ces trois cas. Si $m = 2$, la norme de l'unité fondamentale étant -1, les indices d'unités sont égaux à 1 ; il n'existe pas de somme S_ε, la somme S_3 est donnée par la formule (39), la somme S_2 est exceptionelle car $k_2 = \mathbf{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{-1})$ contient une unité d'ordre 8. On a :

$$S_2 = \frac{3}{8} E^{(2)}_{D_1, D_2}(1) + \frac{1}{4} E^{(2)}_{D_1, D_2}(2) \tag{45}$$

Si $m = 3$, l'unité fondamentale ε est totalement positive et égale à $\varepsilon = \dfrac{(1+\sqrt{3})^2}{2}$. Le corps k_ε est $\mathbf{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{-2})$; l'ordre $R_3(1, \sqrt{-\varepsilon})$ est maximal, donc on a :

$$S_\varepsilon = \frac{h(3)\,h(-2)\,h(-6)}{4} E^{(\varepsilon)}_{D_1, D_2}(1) = \frac{1}{2} E^{(\varepsilon)}_{D_1, D_2}(1) \tag{46}$$

Les sommes S_2 et S_3 sont exceptionelles car $k_2 = k_3 = \mathbf{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{-1}) = \mathbf{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{-3})$. Les ordres O contenus dans k_2 tels que $w(O) \neq 0$ sont donnés dans le tableau suivant :

$f(O)$	1	$\mathfrak{p}_2$	2	$\mathfrak{p}_3$
$w(O)$	12	4	2	3
$h(O)$	1	1	1	1

Nous en déduisons facilement la valeur de S_2 :

$$S_2 = \frac{11}{24} E^{(2)}_{D_1, D_2}(1) + \frac{5}{8} E^{(2)}_{D_1, D_2}(2) + \frac{1}{3} E^{(2)}_{D_1, D_2}(3) \tag{47}$$

Si $m = 5$, la norme de l'unité fondamentale est -1 et les sommes S_2, S_3 sont données par les formules (32), (39). Mais $\mathbf{Q}(\sqrt{5})$ est le sous-corps réel

maximal du 5-ème corps cyclotomique k_5 et la formule (31) doit être remplacée par:

$$\sum_{O} = \sum_{O \subset k_2} + \sum_{O \subset k_3} + \sum_{O \subset k_5} \tag{48}$$

Il est facile de calculer la somme S_5 ainsi introduite:

$$S_5 = \frac{2}{5} E^{(5)}_{D_1, D_2}(1) \tag{49}$$

6. *Théorèmes*

Tous les calculs de ce chapitre ont été effectués pour obtenir les résultats suivants:

THÉORÈME 3.1. *Le nombre de classes d'un ordre d'Eichler d'invariant* (D_1, D_2) *sur un corps quadratique* $\mathbf{Q}(\sqrt{m})$, *où* m *est un entier positif sans facteur carré et différent de* 2, 3. 5, *est égal à*

$$\begin{aligned} H_m(D_1, D_2) = h(m) \Bigg[& \frac{\zeta_m(-1)\, \Phi_m(D_1, D_2)}{2} + \frac{h(-m)}{8} a(m) \\ & + \frac{h(-3m)}{12} b(m) + \frac{h(-n)\, h(-n')}{4} c(m) \Bigg], \end{aligned} \tag{50}$$

où les nombres entiers $a(m)$, $b(m)$, $c(m)$ *sont déterminés par les relations*

$$S_2 = \frac{h(m)\, h(-m)}{8} a(m)$$

$$S_3 = \frac{h(m)\, h(-3m)}{12} b(m)$$

$$S_\varepsilon = \frac{h(m)\, h(-n)\, h(-n')}{4} c(m)$$

THÉOREME 3.2. *Le nombre de classes des ordres d'Eichler d'invariant* (D_1, D_2) *sur les corps* $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$, $\mathbf{Q}(\sqrt{3})$, $\mathbf{Q}(\sqrt{5})$ *est respectivement égal à*

$$H_2(D_1, D_2) = \frac{\Phi_2(D_1, D_2)}{24} + \frac{3 E^{(2)}_{D_1, D_2}(1) + 2 E^{(2)}_{D_1, D_2}(2)}{8} + \frac{E^{(3)}_{D_1, D_2}(1)}{3} \tag{51}$$

$$H_3(D_1, D_2) = \frac{\Phi_3(D_1, D_2)}{12} + \frac{11\, E^{(2)}_{D_1, D_2}(1) + 15\, E^{(2)}_{D_1, D_2}(2) + 8\, E^{(2)}_{D_1, D_2}(3)}{24} + \frac{E^{(\varepsilon)}_{D_1, D_2}(1)}{2}$$

$$H_5(D_1, D_2) = \frac{\Phi_5(D_1, D_2)}{30} + \frac{E^{(2)}_{D_1, D_2}(1)}{4} + \frac{E^{(3)}_{D_1, D_2}(1)}{3} + \frac{2\, E^{(5)}_{D_1, D_2}(1)}{5}.$$

Appendice:

Calcul des nombres de classes des ordres d'Eichler sur le corps des nombres rationnels

Nous avons calculé sur ordinateur les nombres H_{D_1,D_2}, T_{D_1,D_2}, $H^{+}_{D_1,D_2}$ pour les ordres d'Eichler d'invariant (D_1, D_2) sur le corps des nombres rationnels. Nous avons utilisé les résultats théoriques du chapitre 1.

D_1 désigne un produit d'un nombre impair de nombres premiers sans facteur carré,

D_2 désigne un produit de nombres premier sans facteur carré tel que $(D_1, D_2) = 1$.

s est le nombre de diviseurs premiers de $D_1\, D_2$.

$h(-m)$ est le nombre de classes du corps quadratique imaginaire $\mathbf{Q}(\sqrt{-m})$, $d(-m)$ est son discriminant:

$$d(-m) = \begin{cases} -m & \text{si } m \equiv -1\,(4) \\ -4m & \text{si } m \not\equiv -1\,(4). \end{cases}$$

$E^{(m)}_{D_1, D_2} = \prod_{p \mid D_1} \left(1 - \left(\frac{d(-m)}{p}\right)\right) \prod_{p \mid D_2} \left(1 + \left(\frac{d(-m)}{p}\right)\right)$ est le symbole $E_{D_1,D_2}(O)$ correspondant à l'ordre maximal O de $\mathbf{Q}(\sqrt{-m})$.

$F^{(m)}_{D_1, D_2} = 2 \prod_{p \mid D_1} \left(1 - \left(\frac{d(-m)}{p}\right)\right) \prod_{\substack{p \mid D_2 \\ p \neq 2}} \left(1 + \left(\frac{d(-m)}{p}\right)\right)$ est le symbole correspondant à l'ordre de conducteur 2 de $\mathbf{Q}(\sqrt{-m})$ si D_2 est pair et $m \equiv 3\,(8)$.

On pose

$$\lambda(m) = \begin{cases} 1 & \text{si } m \not\equiv -1\,(4) \\ 2 & \text{si } m \equiv 7\,(8) \quad \text{ou si } m = 3 \\ 4 & \text{si } m \equiv 3\,(8) \quad \text{et} \quad m \neq 3, \end{cases}$$