Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 21 (1975)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: NOMBRE DE CLASSES D'UN ORDRE D'EICHLER ET VALEUR AU POINT -1 DE LA FONCTION ZÊTA D'UN CORPS QUADRATIQUE RÉEL

Autor: Vigneras, Marie-France

Kapitel: Chapitre 2. Partie fractionnaire de $\zeta_k (-1)$

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-47331

CHAPITRE 2. PARTIE FRACTIONNAIRE DE $\zeta_k(-1)$

1. *Théorème général*

La relation $2H/h_k \in \mathbf{Z}$ du corollaire 1.1 nous donne une formule pour la partie fractionnaire de $\zeta_k(-1)$ dans laquelle ne subsiste apparemment aucun lien avec les quaternions. Cette formule est la base de ce chapitre et nous la redonnons avec suffisamment de détails pour qu'il ne soit pas utile de se référer au chapitre précédent.

D'après la proposition 1.3 démontrée dans le chapitre précédent, la relation $2H/h_k \in \mathbf{Z}$ s'écrit:

$$\zeta_k(-1)\, \Phi_k(D_1, D_2)\, 2^{2-n_k} + \sum_O \frac{w(O)-1}{w(O)} E_{D_1, D_2}(O)\, h'(O) \in \mathbf{Z}$$

ou encore

PROPOSITION 2.1. *On a pour tout corps de nombres k totalement réel*

$$(21) \qquad \zeta_k(-1)\, \Phi_k(D_1, D_2)\, 2^{2-n} \equiv \sum_O E_{D_1, D_2}(O) \frac{h'(O)}{w(O)} \qquad \bmod 1\,.$$

Dans cette relation,

n est le degré absolu de k et $\zeta_k(.)$ sa fonction zêta,

D_1 est un produit d'idéaux premiers de k, sans facteurs carrés, dont le nombre a même parité que le degré n du corps k

D_2 est aussi un produit d'idéaux premiers de k, sans facteurs carrés et $(D_1, D_2) = 1$.

La somme $\sum_O$ porte sur tous les ordres O des extensions quadratiques de k totalement imaginaires tels que $w(O) = [O^* : R^*]$ soit supérieur strictement à 1. Cette somme est donc finie. Si $h(O)$ est le nombre de classes des idéaux inversibles de O, on pose $h'(O) = h(O)/h_k$.

Enfin, on a

$$\Phi_k(D_1, D_2) = \prod_{\mathfrak{p}|D_1} (1 - N\mathfrak{p}) \prod_{\mathfrak{p}|D_2} (1 + N\mathfrak{p})$$

$$E_{D_1,D_2}(O) = \prod_{\mathfrak{p}|D_1} \left(1 - \left\{\frac{O}{\mathfrak{p}}\right\}\right) \prod_{\mathfrak{p}|D_2} \left(1 + \left\{\frac{O}{\mathfrak{p}}\right\}\right)$$

où $\left\{\frac{O}{\mathfrak{p}}\right\} = 1$ *si $\mathfrak{p}$ divise le conducteur $f(O)$ de O, sinon*

$$\left\{\frac{O}{\mathfrak{p}}\right\} = \begin{cases} 0 \text{ si } \mathfrak{p} \text{ est ramifié dans } k\,(O) \\ 1 \text{ si } \mathfrak{p} \text{ est décomposé dans } k\,(O) \\ -1 \text{ si } \mathfrak{p} \text{ est inerte dans } k\,(O) \end{cases}$$

Soit p un nombre premier. Tout nombre rationnel x peut s'écrire de façon unique sous la forme $\frac{a}{p^n} + b$ où n est un entier positif ou nul, a un entier premier à p, compris entre 1 et $p^n - 1$ (si $n = 0$, on prend $a = 0$) et b un nombre rationnel p-entier, $\frac{a}{p^n}$ s'appelle la p-partie fractionnaire de x.

Pour p impair (resp. $p = 2$) on note ξ_p une racine de l'unité d'ordre p (resp. d'ordre 4).

On note w_p l'indice des unités de k dans celles de $k\,(\xi_p)$ et s_p le nombre d'idéaux premiers $\mathfrak{p} \mid p$ inertes dans $k\,(\xi_p)$. Si $h_{k(\xi_p)}$ est le nombre de classes de $k\,(\xi_p)$ on pose $h'_p = h_{k\,(\xi_p)}/h_k$.

THÉOREME II.1. *Soit p un nombre premier impair ; la valeur au point* -1 *de la fonction zêta d'un corps de nombres totalement réel k est entière en p si* $[k\,(\xi_p) : k] > 2$ *ou s'il existe un idéal premier* $\mathfrak{p} \mid p$ *de k décomposé dans* $k\,(\xi_p)$. *Sinon, la p-partie fractionnaire de* $2^{2-n}\,\zeta_k(-1)$ *est celle de*

$$\frac{h'_p\, 2^{s_p}}{w_p \prod\limits_{\mathfrak{p} \mid p} (1 - N\mathfrak{p})}\,.$$

S'il existe un idéal premier $\mathfrak{p} \mid 2$ *de k décomposé dans* $k\,(\xi_2)$ *alors* $\zeta_k(-1)/2^{n-3}$ *est entier en* 2, *sinon sa partie fractionnaire est celle de*

$$\frac{h'_2\, 2^{s_2+1}}{w_2 \prod\limits_{\mathfrak{p} \mid 2} (1 - N\mathfrak{p})}\,.$$

La partie fractionnaire de $\zeta_k(-1)$ a été également calculée par Brown [1] et Greenberg [5]. Le théorème ne donne que la 2-partie fractionnaire de $\zeta_k(-1)/2^{n-3}$; nous avons étudié des cas particuliers: corps quadratiques réels, corps cyclotomiques et obtenus la 2-partie fractionnaire de $\zeta_k(-1)/2^{n-1}$.

*Démonstration du théorème II.*1.

Premier cas : p est un nombre premier impair. On choisit $D_2 = (1)$, D_1 un produit d'idéaux premiers $\mathfrak{p} \mid p$ (en nombre convenable). Alors

$$\Phi_k(D_1, 1) = \prod_{\mathfrak{p} | D_1} (1 - N\mathfrak{p})$$

est premier à p, la p-partie fractionnaire de $\zeta_k(-1)\, 2^{2-n}$ est celle de:

$$\frac{1}{\Phi_k(D_1, 1)} \sum_{\xi_p \in O} E_{D_1,1}(O) \frac{h'(O)}{w(O)}$$

car si $\xi_p \notin O$, alors $\dfrac{1}{w(O)}$ est entier en p.

La condition sur le degré $[k(\xi_p) : k] = 2$ pour qu'il existe une p-partie fractionnaire est claire puisque la somme porte sur des ordres O d'extensions quadratiques de k. S'il existe $\mathfrak{p} \mid D_1$ décomposé dans $k(\xi_p)$, alors

$$E_{D_1,1}(O) = \prod_{\mathfrak{p} | D_1} \left(1 - \left\{\frac{O}{\mathfrak{p}}\right\}\right) = 0$$

et $\zeta_k(-1)\, 2^{2-n}$ est entier en p. Si $\mathfrak{p}_o \mid p$ est décomposé dans $k(\xi_p)$, il est toujours possible de choisir D_1 divisible par $\mathfrak{p}_o$, en tenant compte de la parité de n, sauf si n est pair et si $\mathfrak{p}_o$ est l'unique idéal premier de k au-dessus de p. Dans ce cas, en choisissant $D_1 = (1)$ nous allons montrer que la contribution de la somme qui détermine la p-partie fractionnaire de $\zeta_k(-1)$

$$\sum_{\xi_p \in O} E_{D_1,1}(O) \frac{h'(O)}{w(O)}$$

est entière. Les ordres O contenant ξ_p sont les ordres de conducteur $1, \mathfrak{p}_o, \ldots, \mathfrak{p}_o^m$ où $\mathfrak{p}_o^m$ est le conducteur de l'ordre $R[1, \xi_p]$ dans l'ordre maximal de $k(\xi_p)$. Si $p^{n(p)}$ est la plus grande puissance de p divisant w_p, on a $m \geqslant p^{n(p)-1}$. D'autre part si O est un ordre de conducteur $\mathfrak{p}_o^r$, on a

$$\frac{h'(O)}{w(O)} = \frac{h'_p}{w_p} N\mathfrak{p}_o^r \left(1 - \frac{1}{N\mathfrak{p}_o}\right).$$

Pour tous les ordres O,

$$E_{1,1}(O) = 1$$

d'où

$$\sum_{\xi_p \in O} E_{1,1}(O) \frac{h'(O)}{w(O)} = \frac{h'_p}{w_p}\left[1 + \left(1 - \frac{1}{N\mathfrak{p}_o}\right)\left(N\mathfrak{p}_o + \ldots N\mathfrak{p}_o^m\right)\right]$$
$$= \frac{h'_p}{w_p} N\mathfrak{p}_o^m .$$

Il est clair puisque $m \geqslant p^{n(p)-1}$ que cette somme est entière en p.

Dans les autres cas, nous cherchons la p-partie fractionnaire de $\zeta_k(-1)$. Si le nombre d'idéaux premiers de k divisant p a même parité que le degré n, on choisit $D_1 = \prod_{\mathfrak{p} | p} \mathfrak{p}$. Ce choix a l'avantage de réduire la somme $\sum_{\xi_p \in O}$ à l'unique terme correspondant à l'ordre maximal de $k(\xi_p)$, tout ordre non maximal O contenant ξ_p ayant un conducteur non premier à D_1, on a

$$E_{D_1,1}(O) = \prod_{\mathfrak{p} | D_1} \left(1 - \left\{\frac{O}{\mathfrak{p}}\right\}\right) = 0 \qquad \text{si } O \text{ n'est pas maximal,}$$

$$E_{D_1,1}(O) = 2^{s_p} \qquad \text{si } O \text{ est maximal,}$$

où s_p est le nombre d'idéaux premiers au-dessus de p qui sont inertes dans $k(\xi_p)$. La p-partie fractionnaire de $\zeta_k(-1)\, 2^{2-n}$ est donc celle de

$$\frac{1}{\prod_{\mathfrak{p} | p} (1 - N\mathfrak{p})} \; \frac{2^{s_p} h'_p}{w_p}$$

Si la parité de n ne nous permet pas de choisir $D_1 = \prod_{\mathfrak{p} | p} p$ nous isolons $\mathfrak{p}_o \,|\, p$ et nous prenons $D_1 = \prod_{\substack{\mathfrak{p} | p \\ \mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}_o}} \mathfrak{p}$. Ce choix a l'avantage de réduire la somme $\sum_{\xi_p \in O}$ aux ordres contenant ξ_p dont le conducteur est une puissance de $\mathfrak{p}_o$. Si $\mathfrak{p}_o^m$ est la plus grande puissance de $\mathfrak{p}_o$ divisant le conducteur de l'ordre $R[1, \xi_p]$, la somme $\sum_{\xi_p \in O}$ est effectuée sur les ordres de conducteur $1, \mathfrak{p}_o \dots \mathfrak{p}_o^m$.

On a

$$E_{D_1,1}(O) = 2^{s'_p}$$

où $s'_p = s_p - \varepsilon$, avec:

$$\varepsilon = \begin{cases} 1 \text{ si } \mathfrak{p}_o \text{ est inerte dans } k(\xi_p) \\ 0 \text{ si } \mathfrak{p}_o \text{ est ramifié dans } k(\xi_p). \end{cases}$$

On a

$$\sum_{\xi_p \in O} E_{D_1,1}(O) \frac{h'(O)}{w(O)} = \frac{h'_p\, 2^{s'_p}}{w_p} \left[1 + \left(1 + \frac{\varepsilon}{N\mathfrak{p}_o}\right)(N\mathfrak{p}_o + \dots N\mathfrak{p}_o^m)\right]$$

$$= \begin{cases} \dfrac{h'_p\, 2^{s'_p}}{w_p(1 - N\mathfrak{p}_o)} (1 - N\mathfrak{p}_o^{m+1}) \text{ si } \varepsilon = 0 \\[2ex] \dfrac{h'_p\, 2^{s'_p}}{w_p(1 - N\mathfrak{p}_o)} (+2 - N\mathfrak{p}_o^m - N\mathfrak{p}_o^{m+1}) \text{ si } \varepsilon = 1. \end{cases}$$

Dans les 2 cas la p-partie fractionnaire de $\sum\limits_{\xi_p \in O} E_{D_1,1}(O) \frac{h'(O)}{w(O)}$ est celle de $\frac{h'_p 2^{s_p}}{w_p(1 - N\mathfrak{p}_o)}$ donc $\frac{1}{\Phi(D_1, 1)} \sum\limits_{\xi_p \in O} E_{D_1,1}(O) \frac{h'(O)}{w(O)}$ a comme p-partie fractionnaire celle de

$$\frac{h'_p 2^{s_p}}{w_p \prod\limits_{\mathfrak{p}|p} (1 - N\mathfrak{p})} .$$

Deuxième cas : $p = 2$. Contrairement au cas où p est impair, la somme

$$S = \sum_{\xi_p \in O} E_{D_1, D_2}(O) \frac{h'(O)}{w(O)}$$

n'est pas 2-entière, mais

$$w(O) = [O^* : R_k^*] = [O^* : W(O) R_k^*][W(O) R_k^* : R_k^*]$$

$$w(O) = \omega(O) \frac{Q(O)}{2}$$

où $\omega(O)$, $Q(O)$ désignent l'ordre du groupe des racines de l'unité contenues dans O et où $Q(O)$ est l'indice des unités de O (I.5). On a $Q(O) = 1$ ou 2 et $\omega(O) \not\equiv 0 \pmod 4$ si $\xi_2 \notin 0$, donc $2/w(O)$ est 2-entier. Nous obtenons que la 2-partie fractionnaire de $\zeta_k(-1) 2^{3-n}$ est celle de

$$\frac{2}{\Phi(D_1, 1)} \sum_{\xi_2 \in O} E_{D_1,1}(O) \frac{h'(O)}{w(O)} .$$

Les calculs se poursuivent alors de façon analogue au cas p impair.

Si toute unité totalement positive de k est un carré, la somme S est 2-entière, et on obtient en fait la 2-partie fractionnaire de $\xi_k(-1) 2^{2-n}$.

2. *Corps cyclotomique*

Nous supposons que k est le sous-corps réel maximal d'un corps cyclotomique. La structure arithmétique de ces corps étant mieux connue, nous pouvons améliorer le théorème général.

Si k est le sous-corps réel maximal du 2^m-ième corps cyclotomique, $m > 2$, toute unité totalement positive étant un carré (théorème de Weber) et le nombre de classes relatif h'_2 étant impair, *la 2-partie fractionnaire de* $\zeta_k(-1) 2^{2-n}$ *est celle de* $-h'_2 2^{1-m}$ *et l'exposant de* 2 *dans* $\zeta_k(-1)$ *est*

$n - m - 1 = 2^{m-2} - m - 1$. On peut retrouver ce résultat à l'aide des nombres de Bernoulli [6]. On montre que pour $m \geqslant 5$, $\zeta_k(-1)$ est entier en 3, donc le nombre de classes relatif de $\mathbf{Q}(\xi_{2m}, \xi_3)$ est divisible par 3.

Si k est le sous-corps réel maximal du p^m-ème corps cyclotomique (p premier impair), l'indice des unités de $k = \mathbf{Q}(\xi_{p^m} + \xi_{p^m}^{-1})$ dans $\mathbf{Q}(\xi_{p^m})$ est égal à p^m (théorème de Hasse: $Q = 1$) donc *la p-partie fractionnaire de* $\zeta_k(-1)\, 2^{2-n}$ *est celle de*

$$\frac{h'_p}{p^m(1-p)}\,.$$

Si p est un nombre premier regulier, on sait que h'_p est premier à p (théorème d'Iwasawa), donc l'exposant de p dans $\zeta_k(-1)$ est $-m$.

Si k est le sous-corps réel maximal de N-ème corps cyclotomique où N est un nombre composé, l'indice des unités de $k = \mathbf{Q}(\xi_N + \xi_N^{-1})$ dans $\mathbf{Q}(\xi_N)$ est égal à N ou $2N$ selon que N est pair ou impair (théorème de Hasse, $Q = 2$). On obtient des résultats explicites analogues.

3. *Corps quadratique*

Nous donnerons dans le chapitre 3 le calcul de l'expression:

$$\sum_O \frac{w(O) - 1}{2\, w(O)} E_{D_1, D_2}(O)\, h(O)$$

de la proposition 1.3 pour les corps quadratiques réels et nous obtiendrons une formule du nombre de classes d'idéaux

$$H_{D_1, D_2} = \frac{h_k \zeta_k(-1)\, \Phi_k(D_1, D_2)}{2} + \sum_O \frac{w(O) - 1}{2\, w(O)} E_{D_1, D_2}(O)\, h(O)$$

dont nous déduirons la partie fractionnaire de $\zeta_k(-1)/2$ en écrivant que $H_{1,1}/h_k$ est un entier. Nous obtiendrons les résultats suivants:

Proposition 2.2. *Soit* $k = \mathbf{Q}(\sqrt{m})$ *un corps quadratique réel et* $\zeta_m(-1)$ *la valeur au point* -1 *de sa fonction zêta. On note* $h(d)$ *le nombre de classes d'idéaux du corps* $\mathbf{Q}(\sqrt{d})$. *On a*

$$\frac{\zeta_m(-1)}{2} + \alpha(m) \frac{h(-m)}{8} + \beta(m) \frac{h(-3m)}{6} + \gamma(m) \frac{h(n)\, h(n')}{4} \in \mathbf{Z}$$

avec

$$\alpha(m) = \begin{cases} \left.\begin{array}{llll} -3 & m & \equiv & -2\,(4) \\ 2 & m & \equiv & 3\,(8) \\ 0 & m & \equiv & -1\,(8) \end{array}\right\} \; si\ Q_2 = 2 \\ \\ \left.\begin{array}{llll} 1 & m & \equiv & 1\,(4) \\ 3 & m & \equiv & 2\,(4) \\ 2 & m & \equiv & 3\,(8) \\ 4 & m & \equiv & -1\,(8) \end{array}\right\} \; \text{si } Q_2 = 1 \end{cases}$$

$$(22) \qquad \beta(m) \begin{cases} -1 & m' \equiv -1\,(3) \quad m \equiv -1, 2\,(4) \\ 0 & m' \equiv -1\,(3) \quad m \equiv 1\,(4) \\ 1 & m' \equiv 1\,(3) \quad m \equiv 1\,(8) \\ 2 & m' \equiv 1\,(3) \quad m \equiv 5\,(8) \\ 3 & m' \equiv -1\,(3) \quad m \equiv 1, 2\,(8) \\ \\ 1 & m \not\equiv 0\,(3) \\ 3 & m = 3\,m' \quad m' \equiv -1\,(3) \qquad \text{si } Q_3 = 1 \\ 5 & m = 3\,m' \quad m' \equiv -1, 2\,(4) \end{cases}$$

$$\gamma(m) = \begin{cases} 0 & n \equiv 1\,(8) \qquad ou\ n \equiv n' \equiv 5\,(8) \\ 1 & n \equiv n' \not\equiv 1\,(4) \\ 2 & n \equiv 5\,(8) \quad mais\ n \not\equiv 1, 5\,(8) \\ 3 & n \equiv -1\,(4) \quad n' \equiv 2\,(4) \end{cases}$$

où Q_2 et Q_3 désignent l'indice des unités de $Q(\sqrt{-m}, \sqrt{-1})$ et $\mathbf{Q}(\sqrt{-3m}, \sqrt{-3})$, *où γ (m) est défini lorsque $\varepsilon \geqslant 0$ et alors $n = 2 - \mathrm{Tr}\,\varepsilon$ (modulo les carrés) et $nn' = m$ ou $4m$.*

Cas particulier: $m = p$ est un nombre premier. La formule précédente, dans ce cas particulier, est

$$p \equiv 1\,(4) \qquad \frac{\zeta_p(-1)}{2} + \frac{h(-3p)}{6} + \frac{h(-p)}{8} \in \mathbf{Z}$$

$$p \equiv 3\,(8) \qquad \frac{\zeta_p(-1)}{2} + \frac{h(-3p)}{6} + \frac{h(-p)}{4} + \frac{h(-2p)}{4} \in \mathbf{Z}$$

$$p \equiv -1\,(8) \qquad \frac{\zeta_p(-1)}{2} + \frac{h(-3p)}{6} + \frac{h(-2p)}{4} \in \mathbf{Z}$$

Les congruences suivantes sont bien connues:

$$p \equiv 3\,(8) \qquad h(-2p) \equiv 2\,(4) \quad \text{donc} \quad \frac{h(-2p)}{4} - \frac{h(-p)}{2} \in \mathbf{Z}$$

$$p \equiv -1\,(8) \qquad h(-2p) \equiv 0\,(4) \quad \text{donc} \quad \frac{h(-2p)}{4} \in \mathbf{Z}$$

et nous obtenons:

COROLLAIRE 2.1. *Soit p un nombre premier. Les quantités suivantes sont des entiers :*

$$
\begin{array}{lll}
 & p \equiv 1\,(4) & \dfrac{\zeta_p(-1)}{2} + \dfrac{h(-3p)}{6} + \dfrac{h(-p)}{8} \\[2ex]
(23) & p \equiv 3\,(8) & \dfrac{\zeta_p(-1)}{2} + \dfrac{h(-3p)}{6} + \dfrac{3}{4}\,h(-p) \\[2ex]
 & p \equiv -1\,(8) & \dfrac{\zeta_p(-1)}{2} + \dfrac{h(-3p)}{6}
\end{array}
$$

Ces nombres représentent la caractéristique d'Euler-Poincaré du groupe modulaire de $k = \mathbf{Q}(\sqrt{p})$ calculée par Hirzebruch [8].

CHAPITRE 3. NOMBRE DE CLASSES D'UN ORDRE D'EICHLER SUR UN CORPS QUADRATIQUE

On explicite la formule (16) du nombre de classes d'idéaux d'un ordre d'Eichler sur un corps quadratique.

Soit m un entier positif et $k = \mathbf{Q}(\sqrt{m})$; on note respectivement R_m, $h(m)$, $\zeta_m(-1)$, $N_m(.)$, l'anneau des entiers, le nombre de classes, la valeur au point -1 de la fonction zêta, la norme absolue du corps $\mathbf{Q}(\sqrt{m})$; soit D_1 un produit d'un nombre pair d'idéaux premiers distincts de $\mathbf{Q}(\sqrt{m})$ et soit D_2 un autre produit d'idéaux premiers distincts de $\mathbf{Q}(\sqrt{m})$, premier à D_1. Le nombre de classes des ordres d'Eichler sur $\mathbf{Q}(\sqrt{m})$ d'invariant (D_1, D_2) est égal à

$$H = H_m(D_1, D_2) = \frac{h(m)\,\Phi_m(-1)\,\zeta_m(D_1, D_2)}{2} +$$