

Zeitschrift:	L'Enseignement Mathématique
Herausgeber:	Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band:	21 (1975)
Heft:	1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE
 Artikel:	 SUR LA FONCTION SOMMATOIRE DE LA FONCTION « SOMME DES CHIFFRES »
Autor:	Delange, Hubert
Kapitel:	4. DÉTERMINATION DE LA SÉRIE DE FOURIER DE F
DOI:	https://doi.org/10.5169/seals-47328

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 04.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

$$q^{k-1} x''_k = q^{k-1} x_k + 2 q^{-1} = N_{k-1} + \frac{q+3}{2q},$$

et par suite, d'après la périodicité de g ,

$$\begin{aligned} g(q^{k-1} x''_k) - g(q^{k-1} x_k) &= g\left(\frac{q+3}{2q}\right) - g\left(\frac{q-1}{2q}\right) \\ &= \int_{\frac{q-1}{2q}}^{\frac{q+3}{2q}} \left([qt] - q[t] - \frac{q-1}{2} \right) dt. \end{aligned}$$

Mais on a $[t] = 0$ pour $\frac{q-1}{2q} \leq t < \frac{q+3}{2q}$

et

$$\begin{aligned} [qt] &= \frac{q-1}{2} \quad \text{pour} \quad \frac{q-1}{2q} \leq t < \frac{q+1}{2q}, \\ [qt] &= \frac{q+1}{2} \quad \text{pour} \quad \frac{q+1}{2q} \leq t < \frac{q+3}{2q}. \end{aligned}$$

Par suite

$$g(q^{k-1} x''_k) - g(q^{k-1} x_k) = \frac{1}{q}.$$

Finalement, on voit que, pour $k > m$,

$$\rho'_k = \sum_{r=1}^m \left(\alpha_r - \frac{q-1}{2} \right) + \frac{1}{2}.$$

La suite $\{\rho'_k\}$ ne tend donc pas vers $\sum_{r=1}^m \left(\alpha_r - \frac{q-1}{2} \right)$.

4. DÉTERMINATION DE LA SÉRIE DE FOURIER DE F

Si l'on écrit la série de Fourier de F sous la forme

$$\sum_{k \in \mathbf{Z}} c_k e^{2k\pi i x},$$

on a

$$c_k = \int_0^1 F(x) e^{-2k\pi i x} dx.$$

La formule (4) donne pour $0 \leq x < 1$

$$F(x) = \frac{q-1}{2} (1-x) + q^{1-x} h(q^{x-1}).$$

On a donc $c_k = a_k + b_k$, avec

$$a_k = \frac{q-1}{2} \int_0^1 (1-x) e^{-2k\pi i x} dx \quad \text{et} \quad b_k = \int_0^1 q^{1-x} h(q^{x-1}) e^{-2k\pi i x} dx.$$

4.1. On voit immédiatement que

$$a_k = \frac{q-1}{4k\pi i} \quad \text{pour} \quad k \neq 0, \quad \text{et} \quad a_0 = \frac{q-1}{4}.$$

4.2. D'après la formule (3), on a pour tout x réel

$$q^{1-x} h(q^{x-1}) e^{-2k\pi i x} = \sum_{r=0}^{\infty} q^{1-r-x} g(q^{r+x-1}) e^{-2k\pi i x}.$$

La série est d'ailleurs uniformément convergente pour $0 \leq x \leq 1$

Il résulte de là que l'on a

$$b_k = \sum_{r=0}^{\infty} \int_0^1 q^{1-r-x} g(q^{r+x-1}) e^{-2k\pi i x} dx.$$

Le changement de variable $x = 1 - r + \frac{\log u}{\log q}$ donne

$$\int_0^1 q^{1-r-x} g(q^{r+x-1}) e^{-2k\pi i x} dx = \frac{1}{\log q} \int_{q^{r-1}}^{q^r} \frac{g(u)}{u^2} \exp\left(-2k\pi i \frac{\log u}{\log q}\right) du.$$

On obtient ainsi

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\log q} \int_{\frac{1}{q}}^{\infty} \frac{g(u)}{u^2} \exp\left(-2k\pi i \frac{\log u}{\log q}\right) du \\ &= \frac{1}{\log q} \int_{\frac{1}{q}}^{\infty} \frac{g(u)}{u^{2+2k\pi i/\log q}} du. \end{aligned}$$

4.3. Remarquons que l'intégrale

$$\int_{\frac{1}{q}}^{\infty} \frac{g(u)}{u^{s+1}} du$$

est absolument convergente pour $\operatorname{Re} s > 0$ et, si l'on désigne par $G(s)$ sa valeur, la fonction G ainsi définie est holomorphe pour $\operatorname{Re} s > 0$.

On voit que

$$b_k = \frac{1}{\log q} G\left(1 + \frac{2k\pi i}{\log q}\right)$$

et on est ainsi amené à déterminer la fonction G .

D'abord, comme

$$g(u) = \int_0^u \left([qt] - q[t] - \frac{q-1}{2} \right) dt \quad \left(\text{et donc } g\left(\frac{1}{q}\right) = -\frac{q-1}{2q} \right),$$

une intégration par parties donne, pour $\operatorname{Re} s > 0$,

$$G(s) = -\frac{q-1}{2} \cdot \frac{q^{s-1}}{s} + \frac{1}{s} \int_{\frac{1}{q}}^{\infty} \left([qu] - q[u] - \frac{q-1}{2} \right) \frac{du}{u^s}.$$

Maintenant, si l'on suppose que $\operatorname{Re} s > 2$, on peut séparer l'intégrale en trois et l'écrire

$$\int_{\frac{1}{q}}^{\infty} \frac{[qu]}{u^s} du - q \int_{\frac{1}{q}}^{\infty} \frac{[u]}{u^s} du - \frac{q-1}{2} \int_{\frac{1}{q}}^{\infty} \frac{du}{u^s}.$$

On a

$$\int_{\frac{1}{q}}^{\infty} \frac{du}{u^s} = \frac{q^{s-1}}{s-1},$$

$$\int_{\frac{1}{q}}^{\infty} \frac{[u]}{u^s} du = \int_1^{\infty} \frac{[u]}{u^s} du = \frac{1}{s-1} \zeta(s-1)$$

d'après une formule connue¹⁰⁾, et, par le changement de variable $u = \frac{t}{q}$,

$$\int_{\frac{1}{q}}^{\infty} \frac{[qu]}{u^s} du = q^{s-1} \int_1^{\infty} \frac{[t]}{t^s} du = \frac{q^{s-1}}{s-1} \zeta(s-1).$$

On trouve ainsi que, pour $\operatorname{Re} s > 2$,

$$(12) \quad G(s) = -\frac{q-1}{2} \cdot \frac{q^{s-1}}{s-1} + \frac{q^{s-1}-q}{s(s-1)} \zeta(s-1).$$

En raison de l'holomorphie de G , cette formule est valable pour $\operatorname{Re} s > 0, s \neq 1$.

En particulier, pour $k \neq 0$,

$$G\left(1 + \frac{2k\pi i}{\log q}\right) = \left(-\frac{q-1}{4k\pi i} + i \frac{q-1}{2k\pi} \left(1 + \frac{2k\pi i}{\log q}\right)^{-1} \zeta\left(\frac{2k\pi i}{\log q}\right)\right) \log q.$$

En examinant le comportement du second membre de (12) lorsque s tend vers 1, on retrouve le fait connu que $\zeta(0) = -\frac{1}{2}$ et on voit que

$$\begin{aligned} G(1) &= -\frac{q-1}{2} - \frac{q \log q}{2} - (q-1) \zeta'(0) \\ &= \frac{q-1}{2} (\log 2\pi - 1) - \frac{q \log q}{2} \text{ puisque } \zeta'(0) = -\frac{1}{2} \log 2\pi. \end{aligned}$$

On a ainsi les valeurs de b_k pour tous les $k \in \mathbf{Z}$, et on trouve en définitive que

$$c_0 = \frac{q-1}{2 \log q} (\log 2\pi - 1) - \frac{q+1}{4}$$

¹⁰⁾ On a pour $\operatorname{Re} s > 1$: $\zeta(s) = s \int_1^{\infty} \frac{[u]}{u^{s+1}} du$.

On peut le voir simplement en remarquant que l'on a pour tout N entier > 1

$$\begin{aligned} s \int_1^N \frac{[u]}{u^{s+1}} du &= \sum_{n=1}^{N-1} n \int_n^{n+1} \frac{sdu}{u^{s+1}} = \sum_{n=1}^{N-1} n \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s} \right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{2^s}\right) + 2 \left(\frac{1}{2^s} - \frac{1}{3^s}\right) + 3 \left(\frac{1}{3^s} - \frac{1}{4^s}\right) + \dots + (N-1) \left(\frac{1}{(N-1)^s} - \frac{1}{N^s}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n^s} - \frac{N-1}{N^s}. \end{aligned}$$

et, pour $k \neq 0$,

$$c_k = i \frac{q-1}{2k\pi} \left(1 + \frac{2k\pi i}{\log q}\right)^{-1} \zeta\left(\frac{2k\pi i}{\log q}\right).$$

Comme, quand t tend vers l'infini,

$$\zeta(it) = 0(|t|^{\frac{1}{2}+\varepsilon}) \text{ pour tout } \varepsilon > 0,$$

on voit que la série de Fourier de F est absolument convergente.

(*Reçu le 25 février 1975*)

Hubert Delange

Université de Paris-Sud
Mathématiques
F-91405 Orsay

vide-leer-empty