$$q^{k-1}\, x''_k = q^{k-1}\, x_k + 2\, q^{-1} = N_{k-1} + \frac{q+3}{2\,q}\,,$$

et par suite, d'après la périodicité de g,

$$g\,(q^{k-1}x''_k) - g\,(q^{k-1}x_k) = g\left(\frac{q+3}{2q}\right) - g\left(\frac{q-1}{2q}\right)$$

$$= \int_{\frac{q-1}{2q}}^{\frac{q+3}{2q}} \left([qt] - q\,[t] - \frac{q-1}{2}\right) dt\,.$$

Mais on a $[t] = 0$ pour $\dfrac{q-1}{2\,q} \leqslant t < \dfrac{q+3}{2\,q}$

et

$$[qt] = \frac{q-1}{2} \quad \text{pour} \quad \frac{q-1}{2\,q} \leqslant t < \frac{q+1}{2\,q}\,,$$

$$[qt] = \frac{q+1}{2} \quad \text{pour} \quad \frac{q+1}{2\,q} \leqslant t < \frac{q+3}{2\,q}\,.$$

Par suite

$$g\,(q^{k-1}x''_k) - g\,(q^{k-1}x_k) = \frac{1}{q}\,.$$

Finalement, on voit que, pour $k > m$,

$$\rho'_k = \sum_{r=1}^{m} \left(\alpha_r - \frac{q-1}{2}\right) + \frac{1}{2}\,.$$

La suite $\{\rho'_k\}$ ne tend donc pas vers $\displaystyle\sum_{r=1}^{m} \left(\alpha_r - \frac{q-1}{2}\right)$.

4. Détermination de la série de Fourier de F

Si l'on écrit la série de Fourier de F sous la forme

$$\sum_{k \in \mathbf{Z}} c_k\, e^{2k\pi i x}\,,$$

on a

$$c_k = \int_0^1 F(x)\, e^{-2k\pi i x}\, dx\,.$$

La formule (4) donne pour $0 \leqslant x < 1$

$$F(x) = \frac{q-1}{2}(1-x) + q^{1-x} h(q^{x-1}) .$$

On a donc $c_k = a_k + b_k$, avec

$$a_k = \frac{q-1}{2} \int_0^1 (1-x) e^{-2k\pi i x} dx \quad \text{et} \quad b_k = \int_0^1 q^{1-x} h(q^{x-1}) e^{-2k\pi i x} dx .$$

4.1. On voit immédiatement que

$$a_k = \frac{q-1}{4k\pi i} \quad \text{pour} \quad k \neq 0 , \quad \text{et} \quad a_0 = \frac{q-1}{4} .$$

4.2. D'après la formule (3), on a pour tout x réel

$$q^{1-x} h(q^{x-1}) e^{-2k\pi i x} = \sum_{r=0}^{\infty} q^{1-r-x} g(q^{r+x-1}) e^{-2k\pi i x} .$$

La série est d'ailleurs uniformément convergente pour $0 \leqslant x \leqslant 1$

Il résulte de là que l'on a

$$b_k = \sum_{r=0}^{\infty} \int_0^1 q^{1-r-x} g(q^{r+x-1}) e^{-2k\pi i x} dx .$$

Le changement de variable $x = 1 - r + \dfrac{\log u}{\log q}$ donne

$$\int_0^1 q^{1-r-x} g(q^{r+x-1}) e^{-2k\pi i x} dx = \frac{1}{\log q} \int_{q^{r-1}}^{q^r} \frac{g(u)}{u^2} \exp\left(-2k\pi i \frac{\log u}{\log q}\right) du .$$

On obtient ainsi

$$b_k = \frac{1}{\log q} \int_{\frac{1}{q}}^{\infty} \frac{g(u)}{u^2} \exp\left(-2k\pi i \frac{\log u}{\log q}\right) du$$

$$= \frac{1}{\log q} \int_{\frac{1}{q}}^{\infty} \frac{g(u)}{u^{2+2k\pi i/\log q}} du .$$

4.3. Remarquons que l'intégrale

$$\int_{\frac{1}{q}}^{\infty} \frac{g(u)}{u^{s+1}}\, du$$

est absolument convergente pour $\operatorname{Re} s > 0$ et, si l'on désigne par $G(s)$ sa valeur, la fonction G ainsi définie est holomorphe pour $\operatorname{Re} s > 0$.

On voit que

$$b_k = \frac{1}{\log q}\, G\left(1 + \frac{2k\pi i}{\log q}\right)$$

et on est ainsi amené à déterminer la fonction G.

D'abord, comme

$$g(u) = \int_0^u \left([qt] - q\,[t] - \frac{q-1}{2}\right) dt \quad \left(\text{et donc } g\left(\frac{1}{q}\right) = -\frac{q-1}{2q}\right),$$

une intégration par parties donne, pour $\operatorname{Re} s > 0$,

$$G(s) = -\frac{q-1}{2} \cdot \frac{q^{s-1}}{s} + \frac{1}{s} \int_{\frac{1}{q}}^{\infty} \left([qu] - q\,[u] - \frac{q-1}{2}\right) \frac{du}{u^s}.$$

Maintenant, si l'on suppose que $\operatorname{Re} s > 2$, on peut séparer l'intégrale en trois et l'écrire

$$\int_{\frac{1}{q}}^{\infty} \frac{[qu]}{u^s}\, du - q \int_{\frac{1}{q}}^{\infty} \frac{[u]}{u^s}\, du - \frac{q-1}{2} \int_{\frac{1}{q}}^{\infty} \frac{du}{u^s}.$$

On a

$$\int_{\frac{1}{q}}^{\infty} \frac{du}{u^s} = \frac{q^{s-1}}{s-1},$$

$$\int_{\frac{1}{q}}^{\infty} \frac{[u]}{u^s}\, du = \int_1^{\infty} \frac{[u]}{u^s}\, du = \frac{1}{s-1}\, \zeta(s-1)$$

d'après une formule connue [10]), et, par le changement de variable $u = \dfrac{t}{q}$,

$$\int_{\frac{1}{q}}^{\infty} \frac{[qu]}{u^s}\, du = q^{s-1} \int_{1}^{\infty} \frac{[t]}{t^s}\, du = \frac{q^{s-1}}{s-1} \zeta(s-1).$$

On trouve ainsi que, pour $\operatorname{Re} s > 2$,

$$G(s) = -\frac{q-1}{2} \cdot \frac{q^{s-1}}{s-1} + \frac{q^{s-1} - q}{s(s-1)} \zeta(s-1). \tag{12}$$

En raison de l'holomorphie de G, cette formule est valable pour $\operatorname{Re} s > 0$, $s \neq 1$.

En particulier, pour $k \neq 0$,

$$G\left(1 + \frac{2k\pi i}{\log q}\right) = \left(-\frac{q-1}{4k\pi i} + i\,\frac{q-1}{2k\pi}\left(1 + \frac{2k\pi i}{\log q}\right)^{-1} \zeta\left(\frac{2k\pi i}{\log q}\right)\right) \log q.$$

En examinant le comportement du second membre de (12) lorsque s tend vers 1, on retrouve le fait connu que $\zeta(0) = -\dfrac{1}{2}$ et on voit que

$$\begin{aligned} G(1) &= -\frac{q-1}{2} - \frac{q \log q}{2} - (q-1)\zeta'(0) \\ &= \frac{q-1}{2}(\log 2\pi - 1) - \frac{q \log q}{2} \quad \text{puisque } \zeta'(0) = -\frac{1}{2}\log 2\pi. \end{aligned}$$

On a ainsi les valeurs de b_k pour tous les $k \in \mathbf{Z}$, et on trouve en définitive que

$$c_0 = \frac{q-1}{2 \log q}(\log 2\pi - 1) - \frac{q+1}{4}$$

---

[10]) On a pour $\operatorname{Re} s > 1$: $\zeta(s) = s \displaystyle\int_1^{\infty} \frac{[u]}{u^{s+1}}\, du$.

On peut le voir simplement en remarquant que l'on a pour tout N entier > 1

$$\begin{aligned} s \int_1^N \frac{[u]}{u^{s+1}}\, du &= \sum_{n=1}^{N-1} n \int_n^{n+1} \frac{s\,du}{u^{s+1}} = \sum_{n=1}^{N-1} n \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s}\right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{2^s}\right) + 2\left(\frac{1}{2^s} - \frac{1}{3^s}\right) + 3\left(\frac{1}{3^s} - \frac{1}{4^s}\right) + \cdots + (N-1)\left(\frac{1}{(N-1)^s} - \frac{1}{N^s}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n^s} - \frac{N-1}{N^s}. \end{aligned}$$

et, pour $k \neq 0$,

$$c_k = i \frac{q-1}{2k\pi} \left(1 + \frac{2k\pi i}{\log q}\right)^{-1} \zeta\left(\frac{2k\pi i}{\log q}\right).$$

Comme, quand t tend vers l'infini,

$\zeta(it) = 0\left(|t|^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right)$ pour tout $\varepsilon > 0$,

on voit que la série de Fourier de F est absolument convergente.

(Reçu le 25 février 1975)

Hubert Delange
Université de Paris-Sud
Mathématiques
F-91405 Orsay

vide-leer-empty