

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 21 (1975)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LA FONCTION SOMMATOIRE DE LA FONCTION « SOMME DES CHIFFRES »
Autor: Delange, Hubert
Kapitel: 2. DÉMONSTRATION DE LA FORMULE (1)
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-47328>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 22.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

est continue sur \mathbf{R} (et aussi périodique de période 1, mais cette propriété ne nous sert pas).

Finalement on pose

$$(4) \quad F(x) = \frac{q-1}{2} (1 + [x] - x) + q^{1+[x]-x} h(q^{x-[x]-1}).$$

Il est clair que la fonction F définie par cette formule est périodique de période 1, continue pour x non entier, et continue à droite pour x entier. On vérifie immédiatement qu'en fait elle est aussi continue pour x entier :

on a $F(1) = \frac{q-1}{2} + q h\left(\frac{1}{q}\right)$, ce qui est égal à 0 car, comme $g(x) = 0$

pour x entier, la formule (3) donne $h\left(\frac{1}{q}\right) = g\left(\frac{1}{q}\right) = -\frac{q-1}{2q}$; or on voit

que, quand x tend vers 1 par valeurs inférieures, $F(x)$ tend vers $h(1) = 0$.

Nous compléterons notre résultat en montrant que la fonction F n'est dérivable en aucun point et déterminant explicitement sa série de Fourier. Celle-ci est absolument convergente et ses coefficients s'expriment à l'aide des valeurs de la fonction ζ de Riemann aux points $\frac{2k\pi i}{\log q}$, où $k \in \mathbf{Z}^*$.⁷⁾

2. DÉMONSTRATION DE LA FORMULE (1)

Soient $a_0(n)$, $a_1(n)$, $a_2(n)$, ... les chiffres de l'entier positif ou nul n écrit en base q , lus de droite à gauche. En fait il y a seulement un nombre fini de chiffres, mais on peut former une suite infinie en complétant par des zéros.

Ainsi on a
$$n = \sum_{r=0}^{\infty} a_r(n) q^r,$$

avec $0 \leq a_r(n) < q$ pour tout $r \geq 0$ et $a_r(n) = 0$ pour $r > \frac{\log n}{\log q}$.

On a aussi
$$S_q(n) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r(n).$$

⁷⁾ La possibilité de déterminer explicitement la série de Fourier de F nous a été signalée par M. Mauclaire. Il l'obtenait à partir du résultat suivant, qu'il avait établi antérieurement :

On a pour $\operatorname{Re} s > 0$:
$$s \int_1^{\infty} \frac{1}{t^{s+1}} S_q([t]) dt = \frac{q^s - q}{q^s - 1} \zeta(s).$$

Nous donnerons ici un calcul direct.

2.1. Remarquons d'abord que l'on a pour chaque $r \geq 0$

$$(5) \quad a_r(n) = \left[\frac{n}{q^r} \right] - q \left[\frac{n}{q^{r+1}} \right].$$

Cela résulte immédiatement de ce que l'on a pour chaque $k \geq 0$

$$\left[\frac{n}{q^k} \right] = \sum_{j=k}^{\infty} a_j(n) q^{j-k}.$$

Ceci est évidemment vrai pour $k = 0$. Pour $k \geq 1$ on peut écrire

$$\frac{n}{q^k} = \sum_{j=0}^{k-1} a_j(n) q^{j-k} + \sum_{j=k}^{\infty} a_j(n) q^{j-k},$$

et on voit que la première somme au second membre est ≥ 0 et < 1 , tandis que la deuxième est un entier.

Comme, pour $n \leq t < n+1$,

$$\left[\frac{t}{q^r} \right] = \left[\frac{n}{q^r} \right] \text{ et } \left[\frac{t}{q^{r+1}} \right] = \left[\frac{n}{q^{r+1}} \right],$$

on peut écrire (5) sous la forme

$$(6) \quad a_r(n) = \int_n^{n+1} \left(\left[\frac{t}{q^r} \right] - q \left[\frac{t}{q^{r+1}} \right] \right) dt.$$

2.2. Ceci dit, soit m un entier ≥ 1 , et posons $l = \frac{\log m}{\log q}$.

On voit d'abord que, si $n < m$, on a $a_r(n) = 0$ pour $r > [l]$.

Ainsi on a pour chaque $n < m$

$$S_q(n) = \sum_{r=0}^{[l]} a_r(n).$$

Il en résulte que l'on a

$$(7) \quad \sum_{n=0}^{m-1} S_q(n) = \sum_{r=0}^{[l]} \left(\sum_{n=0}^{m-1} a_r(n) \right).$$

Mais la formule (6) donne

$$\sum_{n=0}^{m-1} a_r(n) = \int_0^m \left(\left[\frac{t}{q^r} \right] - q \left[\frac{t}{q^{r+1}} \right] \right) dt$$

$$= \int_0^m \left(\left[\frac{t}{q^r} \right] - q \left[\frac{t}{q^{r+1}} \right] - \frac{q-1}{2} \right) dt + m \frac{q-1}{2}.$$

En faisant le changement de variable $t = q^{r+1} u$, on voit que

$$\sum_{n=0}^{m-1} a_r(n) = q^{r+1} g(q^{-r-1}m) + m \frac{q-1}{2}.$$

En reportant cette valeur dans (7) on obtient

$$\sum_{n=0}^{m-1} S_q(n) = \sum_{r=0}^{[l]} q^{r+1} g(q^{-r-1}m) + (1 + [l]) m \frac{q-1}{2}$$

ou

$$(8) \quad \frac{1}{m} \sum_{n=0}^{m-1} S_q(n) = \frac{1}{m} \sum_{r=0}^{[l]} q^{r+1} g(q^{-r-1}m) + (1 + [l]) \frac{q-1}{2}.$$

En posant $r = [l] - k$, on a

$$\begin{aligned} \sum_{r=0}^{[l]} q^{r+1} g(q^{-r-1}m) &= \sum_{k=0}^{[l]} q^{1+[l]-k} g(mq^{k-[l]-1}) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} q^{1+[l]-k} g(mq^{k-[l]-1}), \end{aligned}$$

puisque, pour $k > [l]$, $m q^{k-[l]-1}$ est un entier et $g(mq^{k-[l]-1}) = 0$.

En tenant compte de ce que $m = q^l$, ceci donne

$$\begin{aligned} \frac{1}{m} \sum_{r=0}^{[l]} q^{r+1} g(q^{-r-1}m) &= q^{1+[l]-l} \sum_{k=0}^{\infty} q^{-k} g(q^k \cdot q^{l-[l]-1}) \\ &= q^{1+[l]-l} h(q^{l-[l]-1}). \end{aligned}$$

Ainsi (8) donne

$$\begin{aligned} \frac{1}{m} \sum_{n=0}^{m-1} S_q(n) &= \frac{q-1}{2} l + \frac{q-1}{2} (1 + [l] - l) + q^{1+[l]-l} h(q^{l-[l]-1}) \\ &= \frac{q-1}{2} l - F(l), \end{aligned}$$

ce qui est le résultat désiré.

2.3. *Remarque* : On peut montrer que l'on a pour tout x réel ≥ 1

$$\sum_{n \leq x} S_q(n) = \frac{q-1}{2 \log q} x \log x + x F\left(\frac{\log x}{\log q}\right) - h(x) + (1 + [x] - x) S_q([x]),$$

formule qui donne (1) en prenant $x = m$.

En posant $\lambda = \frac{\log x}{\log q}$, on a

$$\sum_{n \leq x} S_q(n) = \sum_{r=0}^{[\lambda]} \left(\sum_{n \leq x} a_r(n) \right).$$

On déduit de (6) que l'on a

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x} a_r(n) &= \int_0^x \left(\left[\frac{t}{q^r} \right] - q \left[\frac{t}{q^{r+1}} \right] \right) dt + (1 + [x] - x) a_r([x]), \\ &= q^{r+1} g(q^{-r-1}x) + \frac{q-1}{2} x + (1 + [x] - x) a_r([x]), \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x} S_q(n) &= \\ &\sum_{r=0}^{[\lambda]} q^{r+1} g(q^{-r-1}x) + \frac{q-1}{2} x (1 + [\lambda]) + (1 + [x] - x) S_q([x]), \end{aligned}$$

puis on vérifie que

$$\begin{aligned} \sum_{r=0}^{[\lambda]} q^{r+1} g(q^{-r-1}x) &= q^{1+[\lambda]} \sum_{k=0}^{[\lambda]} q^{-k} g(q^k \cdot q^{\lambda-[\lambda]-1}) \\ &= x q^{1+[\lambda]-\lambda} h(q^{\lambda-[\lambda]-1}) - h(x). \end{aligned}$$

3. DÉMONSTRATION DE LA NON DÉRIVABILITÉ DE LA FONCTION F

Nous allons maintenant montrer que la fonction F n'est dérivable en aucun point. En raison de la périodicité, il suffit de montrer qu'elle n'est dérivable en aucun point de l'intervalle ouvert $]0, 1[$ et qu'elle n'est pas dérivable à gauche au point 1.

3.1. On voit que ceci se ramène à montrer que la fonction h n'est dérivable en aucun point de l'intervalle ouvert $\left] \frac{1}{q}, 1 \right[$ et n'est pas dérivable à gauche au point 1.

En effet, si $\frac{1}{q} \leq t < 1$, on a $0 \leq 1 + \frac{\log t}{\log q} < 1$ et (4) donne