

<b>Zeitschrift:</b>	L'Enseignement Mathématique
<b>Herausgeber:</b>	Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
<b>Band:</b>	21 (1975)
<b>Heft:</b>	1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE
<b>Artikel:</b>	SUR LA FONCTION SOMMATOIRE DE LA FONCTION « SOMME DES CHIFFRES »
<b>Autor:</b>	Delange, Hubert
<b>Kapitel:</b>	1. Introduction
<b>DOI:</b>	<a href="https://doi.org/10.5169/seals-47328">https://doi.org/10.5169/seals-47328</a>

### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 05.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# SUR LA FONCTION SOMMATOIRE DE LA FONCTION « SOMME DES CHIFFRES »

par Hubert DELANGE

## 1. INTRODUCTION

Dans tout ce qui suit,  $q$  est un entier fixe  $> 1$ . On désigne par  $S_q(n)$  la somme des chiffres de l'entier positif ou nul  $n$  écrit en base  $q$ .

Un certain nombre d'auteurs ont étudié le comportement de l'expression

$$\sum_{n \leq x} S_q(n).$$

Bush<sup>1)</sup> avait montré tout d'abord que l'on a quand  $x$  tend vers l'infini

$$\sum_{n \leq x} S_q(n) \sim \frac{q-1}{2 \log q} x \log x.$$

Bellman et Shapiro<sup>2)</sup> ont obtenu

$$\sum_{n \leq x} S_q(n) = \frac{q-1}{2 \log q} x \log x + O(x \log \log x).$$

Mirsky<sup>3)</sup> a remplacé le  $O(x \log \log x)$  par  $O(x)$ , puis Drazin et Griffith<sup>4)</sup> ont fait une étude plus précise du terme d'erreur.

Enfin Trollope<sup>5)</sup> a établi le résultat suivant pour le cas où  $q = 2$ :  
 $n$  étant un entier satisfaisant à  $2^m \leq n < 2^{m+1}$ , avec  $m \geq 0$ , posons  
 $n = 2^m(1+x)$ , de sorte que  $0 \leq x < 1$ .

Alors on a

$$\sum_{k=0}^{n-1} S_2(k) = \frac{n \log n}{2 \log 2} - 2^{m-1} \left( 2f(x) + (1+x) \frac{\log(1+x)}{\log 2} - 2x \right),$$

<sup>1)</sup> An asymptotic formula for the average sum of the digits of integers, *Amer. Math. Monthly*, 47 (1940), pp. 154-156.

<sup>2)</sup> A problem in additive number theory, *Ann. of Math.* (2), 49 (1948), pp. 333-340.

<sup>3)</sup> A theorem on representations of integers in the scale of  $r$ , *Scripta Math.*, 15 (1949), pp. 11-12.

<sup>4)</sup> On the decimal representation of integers, *Proc. Cambridge Phil. Soc.* (4), 48 (1952), pp. 555-565.

<sup>5)</sup> An explicit expression for binary digital sums, *Math. Mag.*, 41 (1968), pp. 21-25.

$$\text{où } f(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{2^r} g(2^r x),$$

$g$  étant la fonction périodique de période 1 déterminée par

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{pour } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ \frac{1-x}{2} & \text{pour } \frac{1}{2} < x < 1. \end{cases}$$

La démonstration de Trollope est assez compliquée. De plus, il dit que son résultat peut se généraliser pour  $q$  quelconque, mais que les calculs sont beaucoup plus compliqués.

Nous nous proposons ici de montrer qu'un calcul extrêmement simple conduit à un énoncé général qui est équivalent pour  $q = 2$  à celui de Trollope, mais dont la formulation nous paraît plus élégante.

On a le théorème suivant:

**THÉOREME.** *Il existe une fonction  $F$  continue sur  $\mathbf{R}$  et périodique de période 1, telle que, pour tout entier  $m \geq 1$ ,*

$$(1) \quad \frac{1}{m} \sum_{n=0}^{m-1} S_q(n) = \frac{q-1}{2 \log q} \log m + F\left(\frac{\log m}{\log q}\right). \text{<sup>6)</sup>}$$

*On peut définir  $F$  de la façon suivante :*

*On définit d'abord une fonction  $g$  sur  $\mathbf{R}$  par la formule*

$$(2) \quad g(x) = \int_0^x \left( [qt] - q[t] - \frac{q-1}{2} \right) dt.$$

Cette fonction est évidemment continue sur  $\mathbf{R}$  et elle est périodique de période 1 du fait que la fonction  $t \mapsto [qt] - q[t] - \frac{q-1}{2}$  est périodique de période 1 et que son intégrale sur l'intervalle  $[0, 1]$  est nulle. Elle est donc bornée et la série  $\sum_{r=0}^{\infty} q^{-r} g(q^r x)$  est uniformément convergente sur  $\mathbf{R}$ .

Ainsi la fonction  $h$  définie sur  $\mathbf{R}$  par

$$(3) \quad h(x) = \sum_{r=0}^{\infty} q^{-r} g(q^r x)$$

<sup>6)</sup> Il est clair que la fonction  $F$  est unique car cette formule détermine ses valeurs aux points  $\frac{\log m}{\log q} - \left[ \frac{\log m}{\log q} \right]$ , dont l'ensemble est partout dense sur  $[0, 1]$ .

est continue sur  $\mathbf{R}$  (et aussi périodique de période 1, mais cette propriété ne nous sert pas).

*Finalement on pose*

$$(4) \quad F(x) = \frac{q-1}{2} (1 + [x] - x) + q^{1+[x]-x} h(q^{x-[x]-1}).$$

Il est clair que la fonction  $F$  définie par cette formule est périodique de période 1, continue pour  $x$  non entier, et continue à droite pour  $x$  entier. On vérifie immédiatement qu'en fait elle est aussi continue pour  $x$  entier:

on a  $F(1) = \frac{q-1}{2} + q h\left(\frac{1}{q}\right)$ , ce qui est égal à 0 car, comme  $g(x) = 0$

pour  $x$  entier, la formule (3) donne  $h\left(\frac{1}{q}\right) = g\left(\frac{1}{q}\right) = -\frac{q-1}{2q}$ ; or on voit

que, quand  $x$  tend vers 1 par valeurs inférieures,  $F(x)$  tend vers  $h(1) = 0$ .

Nous compléterons notre résultat en montrant que la fonction  $F$  n'est dérivable en aucun point et déterminant explicitement sa série de Fourier. Celle-ci est absolument convergente et ses coefficients s'expriment à l'aide

des valeurs de la fonction  $\zeta$  de Riemann aux points  $\frac{2k\pi i}{\log q}$ , où  $k \in \mathbf{Z}^*$ .<sup>7)</sup>

## 2. DÉMONSTRATION DE LA FORMULE (1)

Soient  $a_0(n), a_1(n), a_2(n), \dots$  les chiffres de l'entier positif ou nul  $n$  écrit en base  $q$ , lus de droite à gauche. En fait il y a seulement un nombre fini de chiffres, mais on peut former une suite infinie en complétant par des zéros.

Ainsi on a

$$n = \sum_{r=0}^{\infty} a_r(n) q^r,$$

avec  $0 \leq a_r(n) < q$  pour tout  $r \geq 0$  et  $a_r(n) = 0$  pour  $r > \frac{\log n}{\log q}$ .

On a aussi  $S_q(n) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r(n)$ .

<sup>7)</sup> La possibilité de déterminer explicitement la série de Fourier de  $F$  nous a été signalée par M. Mauclaire. Il l'obtenait à partir du résultat suivant, qu'il avait établi antérieurement:

$$\text{On a pour } \operatorname{Re} s > 0: s \int_1^{\infty} \frac{1}{t^{s+1}} S_q([t]) dt = \frac{q^s - q}{q^s - 1} \zeta(s).$$

Nous donnerons ici un calcul direct.