Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 21 (1975)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LA FONCTION SOMMATOIRE DE LA FONCTION « SOMME DES CHIFFRES »

Autor: Delange, Hubert

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-47328

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 07.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

SUR LA FONCTION SOMMATOIRE DE LA FONCTION « SOMME DES CHIFFRES »

par Hubert DELANGE

1. INTRODUCTION

Dans tout ce qui suit, q est un entier fixe > 1. On désigue par $S_q(n)$ la somme des chiffres de l'entier positif ou nul n écrit en base q.

Un certain nombre d'auteurs ont étudié le comportement de l'expression

$$\sum_{n \leqq x} S_q(n) .$$

Bush[1]) avait montré tout d'abord que l'on a quand x tend vers l'infini

$$\sum_{n \leqq x} S_q(n) \sim \frac{q-1}{2 \log q} x \log x .$$

Bellman et Shapiro [2]) ont obtenu

$$\sum_{n \leqq x} S_q(n) = \frac{q-1}{2 \log q} x \log x + O(x \log\log x) .$$

Mirsky [3]) a remplacé le $O(x \log\log x)$ par $O(x)$, puis Drazin et Griffith [4]) ont fait une étude plus précise du terme d'erreur.

Enfin Trollope[5]) a établi le résultat suivant pour le cas où $q = 2$:

n étant un entier satisfaisant à $2^m \leqslant n < 2^{m+1}$, avec $m \geqslant 0$, posons $n = 2^m(1+x)$, de sorte que $0 \leqslant x < 1$.

Alors on a

$$\sum_{k=0}^{n-1} S_2(k) = \frac{n \log n}{2 \log 2} - 2^{m-1}\left(2f(x) + (1+x)\frac{\log(1+x)}{\log 2} - 2x\right),$$

---

[1]) An asymptotic formula for the average sum of the digits of integers, *Amer. Math. Monthly*, 47 (1940), pp. 154-156.

[2]) A problem in additive number theory, *Ann. of Math.* (2), 49 (1948), pp. 333-340.

[3]) A theorem on representations of integers in the scale of r, *Scripta Math.*, 15 (1949), pp. 11-12.

[4]) On the decimal representation of integers, *Proc. Cambridge Phil. Soc.* (4), 48 (1952), pp. 555-565.

[5]) An explicit expression for binary digital sums, *Math. Mag.*, 41 (1968), pp. 21-25.

où $f(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{2^r} g(2^r x)$,

g étant la fonction périodique de période 1 déterminée par

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} \text{ pour } 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}, \\ \frac{1-x}{2} \text{ pour } \frac{1}{2} < x < 1 . \end{cases}$$

La démonstration de Trollope est assez compliquée. De plus, il dit que son résultat peut se généraliser pour q quelconque, mais que les calculs sont beaucoup plus compliqués.

Nous nous proposons ici de montrer qu'un calcul extrêmement simple conduit à un énoncé général qui est équivalent pour $q = 2$ à celui de Trollope, mais dont la formulation nous paraît plus élégante.

On a le théorème suivant:

THÉOREME. *Il existe une fonction F continue sur* $\mathbf{R}$ *et périodique de période* 1, *telle que, pour tout entier* $m \geqslant 1$,

$$(1) \qquad \frac{1}{m} \sum_{n=0}^{m=1} S_q(n) = \frac{q-1}{2 \log q} \log m + F\left(\frac{\log m}{\log q}\right). \text{ [6]}$$

On peut définir F de la façon suivante :

On définit d'abord une fonction g sur $\mathbf{R}$ *par la formule*

$$(2) \qquad g(x) = \int_0^x \left([qt] - q[t] - \frac{q-1}{2}\right) dt .$$

Cette fonction est évidemment continue sur $\mathbf{R}$ et elle est périodique de période 1 du fait que la fonction $t \mapsto [qt] - q[t] - \frac{q-1}{2}$ est périodique de période 1 et que son intégrale sur l'intervalle [0, 1] est nulle. Elle est donc bornée et la série $\sum_{r=0}^{\infty} q^{-r} g(q^r x)$ est uniformément convergente sur $\mathbf{R}$.

Ainsi *la fonction h définie sur* $\mathbf{R}$ *par*

$$(3) \qquad h(x) = \sum_{r=0}^{\infty} q^{-r} g(q^r x)$$

---

[6]) Il est clair que la fonction F est unique car cette formule détermine ses valeurs aux points $\frac{\log m}{\log q} - \left[\frac{\log m}{\log q}\right]$, dont l'ensemble est partout dense sur [0,1].

est continue sur **R** (et aussi périodique de période 1, mais cette propriété ne nous sert pas).

Finalement on pose

$$F(x) = \frac{q-1}{2}(1+[x]-x) + q^{1+[x]-x}\, h(q^{x-[x]-1}). \tag{4}$$

Il est clair que la fonction F définie par cette formule est périodique de période 1, continue pour x non entier, et continue à droite pour x entier. On vérifie immédiatement qu'en fait elle est aussi continue pour x entier: on a $F(1) = \frac{q-1}{2} + q\, h\left(\frac{1}{q}\right)$, ce qui est égal à 0 car, comme $g(x) = 0$ pour x entier, la formule (3) donne $h\left(\frac{1}{q}\right) = g\left(\frac{1}{q}\right) = -\frac{q-1}{2q}$; or on voit que, quand x tend vers 1 par valeurs inférieures, $F(x)$ tend vers $h(1) = 0$.

Nous compléterons notre résultat en montrant que la fonction F n'est dérivable en aucun point et déterminant explicitement sa série de Fourier. Celle-ci est absolument convergente et ses coefficients s'expriment à l'aide des valeurs de la fonction ζ de Riemann aux points $\frac{2k\pi i}{\log q}$, où $k \in \mathbf{Z}^*$.[7])

2. Démonstration de la formule (1)

Soient $a_0(n)$, $a_1(n)$, $a_2(n)$, ... les chiffres de l'entier positif ou nul n écrit en base q, lus de droite à gauche. En fait il y a seulement un nombre fini de chiffres, mais on peut former une suite infinie en complétant par des zéros.

Ainsi on a
$$n = \sum_{r=0}^{\infty} a_r(n)\, q^r,$$

avec $0 \leqslant a_r(n) < q$ pour tout $r \geqslant 0$ et $a_r(n) = 0$ pour $r > \frac{\log n}{\log q}$.

On a aussi $S_q(n) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r(n)$.

---

[7]) La possibilité de déterminer explicitement la série de Fourier de F nous a été signalée par M. Mauclaire. Il l'obtenait à partir du résultat suivant, qu'il avait établi antérieurement:

On a pour $\operatorname{Re} s > 0$: $s \int_1^{\infty} \frac{1}{t^{s+1}} S_q([t])\, dt = \frac{q^s - q}{q^s - 1}\zeta(s)$.

Nous donnerons ici un calcul direct.

2.1. Remarquons d'abord que l'on a pour chaque $r \geqslant 0$

$$a_r(n) = \left[\frac{n}{q^r}\right] - q\left[\frac{n}{q^{r+1}}\right]. \tag{5}$$

Cela résulte immédiatement de ce que l'on a pour chaque $k \geqslant 0$

$$\left[\frac{n}{q^k}\right] = \sum_{j=k}^{\infty} a_j(n)\, q^{j-k}.$$

Ceci est évidemment vrai pour $k = 0$. Pour $k \geqslant 1$ on peut écrire

$$\frac{n}{q^k} = \sum_{j=0}^{k-1} a_j(n)\, q^{j-k} + \sum_{j=k}^{\infty} a_j(n)\, q^{j-k},$$

et on voit que la première somme au second membre est $\geqslant 0$ et < 1, tandis que la deuxième est un entier.

Comme, pour $n \leqslant t < n + 1$,

$$\left[\frac{t}{q^r}\right] = \left[\frac{n}{q^r}\right] \text{ et } \left[\frac{t}{q^{r+1}}\right] = \left[\frac{n}{q^{r+1}}\right],$$

on peut écrire (5) sous la forme

$$a_r(n) = \int_n^{n+1} \left(\left[\frac{t}{q^r}\right] - q\left[\frac{t}{q^{r+1}}\right]\right) dt. \tag{6}$$

2.2. Ceci dit, soit m un entier $\geqslant 1$, et posons $l = \dfrac{\log m}{\log q}$.

On voit d'abord que, si $n < m$, on a $a_r(n) = 0$ pour $r > [l]$.

Ainsi on a pour chaque $n < m$

$$S_q(n) = \sum_{r=0}^{[l]} a_r(n).$$

Il en résulte que l'on a

$$\sum_{n=0}^{m-1} S_q(n) = \sum_{r=0}^{[l]} \left(\sum_{n=0}^{m-1} a_r(n)\right). \tag{7}$$

Mais la formule (6) donne

$$\sum_{n=0}^{m-1} a_r(n) = \int_0^m \left(\left[\frac{t}{q^r}\right] - q\left[\frac{t}{q^{r+1}}\right]\right) dt$$

$$= \int_0^m \left(\left[\frac{t}{q^r} \right] - q \left[\frac{t}{q^{r+1}} \right] - \frac{q-1}{2} \right) dt + m \frac{q-1}{2} .$$

En faisant le changement de variable $t = q^{r+1} u$, on voit que

$$\sum_{n=0}^{m-1} a_r(n) = q^{r+1} g(q^{-r-1} m) + m \frac{q-1}{2} .$$

En reportant cette valeur dans (7) on obtient

$$\sum_{n=0}^{m-1} S_q(n) = \sum_{r=0}^{[l]} q^{r+1} g(q^{-r-1} m) + (1 + [l]) m \frac{q-1}{2}$$

ou

$$(8) \qquad \frac{1}{m} \sum_{n=0}^{m-1} S_q(n) = \frac{1}{m} \sum_{r=0}^{[l]} q^{r+1} g(q^{-r-1} m) + (1 + [l]) \frac{q-1}{2} .$$

En posant $r = [l] - k$, on a

$$\sum_{r=0}^{[l]} q^{r+1} g(q^{-r-1} m) = \sum_{k=0}^{[l]} q^{1+[l]-k} g(m q^{k-[l]-1})$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} q^{1+[l]-k} g(m q^{k-[l]-1}) ,$$

puisque, pour $k > [l]$, $m\, q^{k-[l]-1}$ est un entier et $g(m q^{k-[l]-1}) = 0$.

En tenant compte de ce que $m = q^l$, ceci donne

$$\frac{1}{m} \sum_{r=0}^{[l]} q^{r+1} g(q^{-r-1} m) = q^{1+[l]-l} \sum_{k=0}^{\infty} q^{-k} g(q^k \cdot q^{l-[l]-1})$$
$$= q^{1+[l]-l} h(q^{l-[l]-1}) .$$

Ainsi (8) donne

$$\frac{1}{m} \sum_{n=0}^{m-1} S_q(n) = \frac{q-1}{2} l + \frac{q-1}{2} (1 + [l] - l) + q^{1+[l]-l} h(q^{l-[l]-1})$$
$$= \frac{q-1}{2} l - F(l) ,$$

ce qui est le résultat désiré.

2.3. Remarque : On peut montrer que l'on a pour tout x réel $\geqslant 1$

$$\sum_{n \leq x} S_q(n) = \frac{q-1}{2 \log q} x \log x + x F\left(\frac{\log x}{\log q}\right) - h(x) + (1 + [x] - x) S_q([x]) ,$$

formule qui donne (1) en prenant $x = m$.

En posant $\lambda = \dfrac{\log x}{\log q}$, on a

$$\sum_{n \leqq x} S_q(n) = \sum_{r=0}^{[\lambda]} \left(\sum_{n \leqq x} a_r(n) \right).$$

On déduit de (6) que l'on a

$$\sum_{n \leqq x} a_r(n) = \int_0^x \left(\left[\frac{t}{q^r} \right] - q \left[\frac{t}{q^{r+1}} \right] \right) dt + (1 + [x] - x)\, a_r([x]),$$

$$= q^{r+1} g(q^{-r-1}x) + \frac{q-1}{2} x + (1 + [x] - x)\, a_r([x]),$$

d'où

$$\sum_{n \leqq x} S_q(n) =$$

$$\sum_{r=0}^{[\lambda]} q^{r+1} g(q^{-r-1}x) + \frac{q-1}{2} x(1 + [\lambda]) + (1 + [x] - x)\, S_q([x]),$$

puis on vérifie que

$$\sum_{r=0}^{[\lambda]} q^{r+1} g(q^{-r-1}x) = q^{1+[\lambda]} \sum_{k=0}^{[\lambda]} q^{-k} g(q^k \cdot q^{\lambda - [\lambda] - 1})$$

$$= x\, q^{1+[\lambda]-\lambda} h(q^{\lambda-[\lambda]-1}) - h(x).$$

3. Démonstration de la non dérivabilité de la fonction F

Nous allons maintenant montrer que la fonction F n'est dérivable en aucun point. En raison de la périodicité, il suffit de montrer qu'elle n'est dérivable en aucun point de l'intervalle ouvert $]0, 1[$ et qu'elle n'est pas dérivable à gauche au point 1.

3.1. On voit que ceci se ramène à montrer que la fonction h n'est dérivable en aucun point de l'intervalle ouvert $\left]\dfrac{1}{q}, 1\right[$ et n'est pas dérivable à gauche au point 1.

En effet, si $\dfrac{1}{q} \leqslant t < 1$, on a $0 \leqslant 1 + \dfrac{\log t}{\log q} < 1$ et (4) donne

$$F\left(1+\frac{\log t}{\log q}\right) = -\frac{q-1}{2}\cdot\frac{\log t}{\log q}+\frac{1}{t}h(t).$$

Ceci vaut encore pour $t = 1$ car $F(1) = h(1) = 0$.

Ainsi on a pour $\frac{1}{q} \leqslant t \leqslant 1$

$$h(t) = tF\left(1+\frac{\log t}{\log q}\right)+\frac{q-1}{2\log q}\,t\log t.$$

Par suite, si F était dérivable au point θ de $]0, 1[$, h serait dérivable au point $q^{\theta-1}$ de $\left]\frac{1}{q}, 1\right[$. Si F était dérivable à gauche en 1, h serait dérivable à gauche en 1.

En fait, nous montrerons que h n'est dérivable en aucun point de l'intervalle ouvert $]0, 1[$ et n'est pas dérivable à gauche au point 1.[8])

3.2. Nous utiliserons la remarque suivante:

Si $x = \frac{a}{q^k}$, où $a \in \mathbf{Z}$ et $k \in \mathbf{N}^*$, on a

$$h(x) = \sum_{r=0}^{k-1} q^{-r} g(q^r x)$$

puisque, dès que $r \geqslant k$, $q^r x$ est un entier et $g(q^r x) = 0$.

Par suite, si $x = \frac{a}{q^k}$ et $x' = \frac{b}{q^k}$, avec a et $b \in \mathbf{Z}$, $a \neq b$ et $k \in \mathbf{N}^*$, on a

$$\frac{h(x')-h(x)}{x'-x} = \sum_{r=0}^{k-1} \frac{g(q^r x')-g(q^r x)}{q^r x'-q^r x}.$$

3.3. Il est très facile de montrer que la fonction h n'est pas dérivable à gauche au point 1.

Cela résulte immédiatement de ce que, si $\xi_k = 1 - q^{-k}$, la suite $\left\{\frac{h(1)-h(\xi_k)}{1-\xi_k}\right\}$ tend vers $+\infty$.

---

[8]) La fonction h n'est donc dérivable en aucun point. Dans le cas où $q = 2$, $-h$ est la fonction f de Trollope. Celui-ci indique que cette fonction f n'est dérivable en aucun point.

En effet, d'après la remarque précédente,

$$\frac{h(1) - h(\xi_k)}{1 - \xi_k} = \sum_{r=0}^{k-1} \frac{g(q^r) - g(q^r \xi_k)}{q^r - q^r \xi_k} = \sum_{r=0}^{k-1} q^{k-r} \left(g(q^r) - g(q^r \xi_k)\right).$$

Mais, comme $q^r \xi_k = q^r - q^{r-k}$, d'après la périodicité de g on a pour chaque $r \leqslant k - 1$

$$g(q^r) - g(q^r \xi_k) = g(1) - g(1 - q^{r-k}) = \int_{1-q^{r-k}}^{1} \left([qt] - q[t] - \frac{q-1}{2}\right) dt,$$

ce qui est égal à $q^{r-k} \dfrac{q-1}{2}$ car, pour $1 - q^{r-k} \leqslant t < 1$, $[t] = 0$ et $[qt] = q - 1$ puisque $q - 1 \leqslant q - q^{r-k+1} \leqslant qt < q$. On voit donc que

$$\frac{h(1) - h(\xi_k)}{1 - \xi_k} = k \frac{q-1}{2}.$$

3.3. Soit maintenant θ un nombre de l'intervalle ouvert $]0, 1[$.

Nous allons montrer que h n'est pas dérivable en θ.

Nous nous baserons sur l'observation suivante:

Si h était dérivable en θ, quelles que soient les suites $\{x_k\}$ et $\{x'_k\}$ tendant vers θ, avec $x_k \leqslant \theta < x'_k$ pour chaque k, la suite $\left\{\dfrac{h(x'_k) - h(x_k)}{x'_k - x_k}\right\}$ tendrait vers $h'(\theta)$. [9])

3.3.1. Remarquons d'abord que l'on peut écrire

$$\theta = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j q^{-j},$$

où les α_j sont des entiers satisfaisant à $0 \leqslant \alpha_j \leqslant q - 1$ et il y a une infinité de j pour lesquels $\alpha_j \neq q - 1$ (l'écriture du nombre θ en base q étant $0, \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_j \ldots$).

---

[9]) Il existerait une fonction ε continue en θ et nulle en ce point telle que l'on ait pour tout t

$$h(t) = h(\theta) + (t - \theta) h'(\theta) + (t - \theta) \varepsilon(t),$$

et l'on aurait

$$\frac{h(x'_k) - h(x_k)}{x'_k - x_k} = h'(\theta) + \frac{(x'_k - \theta)\varepsilon(x'_k) + (\theta - x_k)\varepsilon(x_k)}{x'_k - x_k},$$

d'où

$$\left| \frac{h(x'_k) - h(x_k)}{x'_k - x_k} - h'(\theta) \right| \leqslant \operatorname{Sup}\left(|\varepsilon(x_k)|, |\varepsilon(x'_k)|\right).$$

Nous introduirons une suite d'entiers $N_0, N_1, \ldots, N_\nu, \ldots$ définie par

$$N_0 = 0 \text{ et, pour } \nu \geqslant 1,\ N_\nu = \sum_{j=1}^{\nu} \alpha_j q^{\nu-j}.$$

Ceci dit, définissons x_k et x'_k pour $k \geqslant 1$ par

$$x_k = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j q^{-j} \quad \text{et} \quad x'_k = x_k + q^{-k},$$

et posons $\rho_k = \dfrac{h(x'_k) - h(x_k)}{x'_k - x_k}$.

Les deux suites $\{x_k\}$ et $\{x'_k\}$ tendent vers θ et on a pour tout $k \geqslant 1$

$$x_k \leqslant \theta < x'_k .$$

Par suite, si h était dérivable au point θ, la suite $\{\rho_k\}$ tendrait vers $h'(\theta)$.

On a $x_k = N_k q^{-k}$ et $x'_k = (N_k + 1) q^{-k}$.

Donc, d'après la remarque du paragraphe 3.2., on a pour tout $k \geqslant 1$

$$\rho_k = \sum_{r=0}^{k-1} \frac{g(q^r x'_k) - g(q^r x_k)}{q^r x'_k - q^r x_k}.$$

D'après la formule (2), on a pour chaque $r \leqslant k - 1$

$$g(q^r x'_k) - g(q^r x_k) = \int_{q^r x_k}^{q^r x'_k} \left([qt] - q[t] - \frac{q-1}{2} \right) dt .$$

On va voir que, pour $q^r x_k \leqslant t < q^r x'_k$, on a

$$[qt] - q[t] = \alpha_{r+1} .$$

On voit d'abord que, pour $0 \leqslant \nu \leqslant k$, on a

$$N_\nu \leqslant q^\nu x_k \leqslant N_\nu + 1 - q^{\nu-k},$$

d'où il résulte que

$$N_\nu \leqslant q^\nu x_k < q^\nu x'_k \leqslant N_\nu + 1 . \tag{9}$$

C'est vrai pour $\nu = 0$ car $0 \leqslant x_k \leqslant (q-1) \sum_{j=1}^{k} q^{-j} = 1 - q^{-k}$.

Si $k \geqslant 2$, pour $1 \leqslant \nu \leqslant k - 1$ on a

$$q^\nu x_k = \sum_{j=1}^{\nu} \alpha_j q^{\nu-j} = N_\nu + \sum_{j=\nu+1}^{k} \alpha_j q^{\nu-j},$$

d'où

$$N_\nu \leqslant q^\nu x_k \leqslant N_\nu + (q-1) \sum_{j=\nu+1}^{k} q^{\nu-j} = N_\nu + 1 - q^{\nu-k}.$$

Enfin $q^k x_k = N_k$.

Il résulte de (9) que, pour $q^r x_k \leqslant t < q^r x'_k$, avec $0 \leqslant r \leqslant k-1$, on a

$$N_r \leqslant t < N_r + 1 \quad \text{et} \quad N_{r+1} \leqslant qt < N_{r+1} + 1,$$

et par suite

$$[t] = N_r \quad \text{et} \quad [qt] = N_{r+1},$$

d'où

$$[qt] - q[t] = N_{r+1} - q N_r,$$

qui est bien égal à α_{r+1}.

Ceci montre que, pour $0 \leqslant r \leqslant k-1$,

$$g(q^r x'_k) - g(q^r x_k) = (q^r x'_k - q^r x_k)\left(\alpha_{r+1} - \frac{q-1}{2}\right),$$

et on voit ainsi que

$$\rho_k = \sum_{r=0}^{k-1}\left(\alpha_{r+1} - \frac{q-1}{2}\right) = \sum_{r=1}^{k}\left(\alpha_r - \frac{q-1}{2}\right).$$

La fonction h n'est donc certainement pas dérivable au point θ si la série

$$\sum_{r=1}^{\infty}\left(\alpha_r - \frac{q-1}{2}\right) \tag{10}$$

n'est pas convergente.

C'est certainement le cas si q est pair car alors on a pour tout r

$$\left|\alpha_r - \frac{q-1}{2}\right| \geqq \frac{1}{2}$$

puisque $2\left(\alpha_r - \frac{q-1}{2}\right) = 2\alpha_r - q + 1$ est un entier impair.

Par contre, dans le cas où q est impair, la série (10), dont tous les termes sont des entiers, peut être convergente. Cela se produit si, et seulement si, ces termes sont tous nuls à partir d'un certain rang, c'est à dire si l'on a $\alpha_j = \frac{q-1}{2}$ à partir d'une certaine valeur de j.

Il faut donc traiter séparément ce cas.

3.3.2. Supposons donc maintenant que q est impair et que l'on a $\alpha_j = \dfrac{q-1}{2}$ pour $j > m$, avec $m \geqslant 1$.

Alors, d'après ce que l'on vient de voir, la suite $\{\rho_k\}$ tend vers $\sum_{r=1}^{m} \left(\alpha_r - \dfrac{q-1}{2}\right)$. Donc, si h était dérivable au point θ, on devrait avoir

$$h'(\theta) = \sum_{r=1}^{m} \left(\alpha_r - \frac{q-1}{2}\right).$$

Nous allons introduire une nouvelle suite $\{x''_k\}$ définie par

$$x''_k = x_k + 2\,q^{-k}$$

et poser

$$\rho'_k = \frac{h(x''_k) - h(x_k)}{x''_k - x_k}.$$

En utilisant encore la remarque du paragraphe 3.2., on voit que

$$\rho'_k = \sum_{r=0}^{k-1} \frac{g(q^r x''_k) - g(q^r x_k)}{q^r x''_k - q^r x_k}.$$

Si h était dérivable au point θ, la suite $\{\rho'_k\}$ devrait tendre vers $\sum_{r=1}^{m} \left(\alpha_r - \dfrac{q-1}{2}\right)$. On va montrer qu'il n'en est pas ainsi.

On voit d'abord que, si $k > m$, on a pour $0 \leqslant v \leqslant k-1$

$$N_v \leqslant q^v x_k \leqslant N_v + 1 - 2\,q^{v-k},$$

d'où il résulte que

$$N_v \leqslant q^v x_k < q^v x''_k \leqslant N_v + 1. \tag{11}$$

En effet, on peut d'abord écrire

$$x_k = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j q^{-j} + \sum_{j=m+1}^{k} \alpha_j q^{-j},$$

d'où

$$0 \leqslant x_k \leqslant (q-1) \sum_{j=1}^{m} q^{-j} + \frac{q-1}{2} \sum_{j=m+1}^{k} q^{-j} = 1 - \frac{1}{2}(q^{-m} + q^{-k}).$$

Mais $q^{-m} + q^{-k} = (q^{k-m}+1)\,q^{-k} \geqslant 4q^{-k}$ puisque $q \geqslant 3$ et $k - m \geqslant 1$.

Pour $1 \leqslant \nu \leqslant k-1$, on a, comme on l'a déjà vu,

$$q^\nu x_k = N_\nu + \sum_{j=\nu+1}^{k} \alpha_j q^{\nu-j}.$$

Ceci donne toujours $q^\nu x_k \geqslant N_\nu$.
D'autre part, si $\nu < m$, on peut écrire

$$q^\nu x_k = N_\nu + \sum_{j=\nu+1}^{m} \alpha_j q^{\nu-j} + \sum_{j=m+1}^{k} \alpha_j q^{\nu-j}$$

et on voit ainsi que

$$q^\nu x_k \leqslant N_\nu + (q-1) \sum_{j=\nu+1}^{m} q^{\nu-j} + \frac{q-1}{2} \sum_{j=m+1}^{k} q^{\nu-j}$$

$$= N_\nu + 1 - \frac{1}{2}(q^{\nu-m} + q^{\nu-k}),$$

d'où

$$q^\nu x_k \leqslant N_\nu + 1 - 2q^{\nu-k},$$

puisque

$$q^{\nu-m} + q^{\nu-k} = (q^{k-m}+1)\, q^{\nu-k} \geqq 4\, q^{\nu-k}.$$

Si $\nu \geqslant m$, on a simplement

$$q^\nu x_k = N_\nu + \frac{q-1}{2} \sum_{j=\nu+1}^{k} q^{\nu-j} = N_\nu + 1 - \frac{1}{2}(1+q^{\nu-k})$$

et

$$1 + q^{\nu-k} = (q^{k-\nu}+1)\, q^{\nu-k} \geqq 4\, q^{\nu-k}.$$

Il résulte de (11) que, si $k > m$, pour $q^r x_k \leqslant t < q^r x''_k$ avec $0 \leqslant r \leqslant k-2$, on a $[t] = N_r$ et $[qt] = N_{r+1}$, d'où $[qt] - q\,[t] = \alpha_{r+1}$.

Donc, si $k > m$, on a pour $0 \leqslant r \leqslant k-2$

$$g(q^r x''_k) - g(q^r x_k) = (q^r x''_k - q^r x_k)\left(\alpha_{r+1} - \frac{q-1}{2}\right),$$

et par suite

$$\rho'_k = \sum_{r=0}^{k-2}\left(\alpha_{r+1} - \frac{q-1}{2}\right) + \frac{g(q^{k-1}x''_k) - g(q^{k-1}x_k)}{q^{k-1}x''_k - q^{k-1}x_k}$$

$$= \sum_{r=1}^{m}\left(\alpha_r - \frac{q-1}{2}\right) + \frac{q}{2}\left(g(q^{k-1}x''_k) - g(q^{k-1}x_k)\right).$$

Notons maintenant que l'on a

$$q^{k-1} x_k = N_{k-1} + \alpha_k q^{-1} = N_{k-1} + \frac{q-1}{2q}$$

et

$$q^{k-1}\,x''_k = q^{k-1}\,x_k + 2\,q^{-1} = N_{k-1} + \frac{q+3}{2\,q},$$

et par suite, d'après la périodicité de g,

$$g\,(q^{k-1}x''_k) - g\,(q^{k-1}x_k) = g\left(\frac{q+3}{2q}\right) - g\left(\frac{q-1}{2q}\right)$$

$$= \int_{\frac{q-1}{2q}}^{\frac{q+3}{2q}} \left([qt] - q\,[t] - \frac{q-1}{2}\right) dt\,.$$

Mais on a $[t] = 0$ pour $\dfrac{q-1}{2\,q} \leqslant t < \dfrac{q+3}{2\,q}$

et

$$[qt] = \frac{q-1}{2} \quad \text{pour} \quad \frac{q-1}{2\,q} \leqslant t < \frac{q+1}{2\,q},$$

$$[qt] = \frac{q+1}{2} \quad \text{pour} \quad \frac{q+1}{2\,q} \leqslant t < \frac{q+3}{2\,q}.$$

Par suite

$$g\,(q^{k-1}x''_k) - g\,(q^{k-1}x_k) = \frac{1}{q}\,.$$

Finalement, on voit que, pour $k > m$,

$$\rho'_k = \sum_{r=1}^{m} \left(\alpha_r - \frac{q-1}{2}\right) + \frac{1}{2}\,.$$

La suite $\{\rho'_k\}$ ne tend donc pas vers $\displaystyle\sum_{r=1}^{m} \left(\alpha_r - \frac{q-1}{2}\right)$.

4. Détermination de la série de Fourier de F

Si l'on écrit la série de Fourier de F sous la forme

$$\sum_{k \in \mathbf{Z}} c_k\, e^{2k\pi i x}\,,$$

on a

$$c_k = \int_0^1 F\,(x)\, e^{-2k\pi i x}\, dx\,.$$

La formule (4) donne pour $0 \leqslant x < 1$

$$F(x) = \frac{q-1}{2}(1-x) + q^{1-x} h(q^{x-1}).$$

On a donc $c_k = a_k + b_k$, avec

$$a_k = \frac{q-1}{2}\int_0^1 (1-x)\, e^{-2k\pi i x}\, dx \quad \text{et} \quad b_k = \int_0^1 q^{1-x} h(q^{x-1})\, e^{-2k\pi i x}\, dx .$$

4.1. On voit immédiatement que

$$a_k = \frac{q-1}{4\, k\, \pi\, i} \quad \text{pour} \quad k \neq 0, \quad \text{et} \quad a_0 = \frac{q-1}{4}.$$

4.2. D'après la formule (3), on a pour tout x réel

$$q^{1-x} h(q^{x-1})\, e^{-2k\pi i x} = \sum_{r=0}^{\infty} q^{1-r-x} g(q^{r+x-1})\, e^{-2k\pi i x}.$$

La série est d'ailleurs uniformément convergente pour $0 \leqslant x \leqslant 1$

Il résulte de là que l'on a

$$b_k = \sum_{r=0}^{\infty} \int_0^1 q^{1-r-x} g(q^{r+x-1})\, e^{-2k\pi i x}\, dx .$$

Le changement de variable $x = 1 - r + \dfrac{\log u}{\log q}$ donne

$$\int_0^1 q^{1-r-x} g(q^{r+x-1})\, e^{-2k\pi i x}\, dx = \frac{1}{\log q}\int_{q^{r-1}}^{q^r} \frac{g(u)}{u^2} \exp\left(-2k\pi i \frac{\log u}{\log q}\right) du .$$

On obtient ainsi

$$b_k = \frac{1}{\log q}\int_{\frac{1}{q}}^{\infty} \frac{g(u)}{u^2} \exp\left(-2k\pi i \frac{\log u}{\log q}\right) du$$

$$= \frac{1}{\log q}\int_{\frac{1}{q}}^{\infty} \frac{g(u)}{u^{2+2k\pi i/\log q}}\, du .$$

4.3. Remarquons que l'intégrale

$$\int_{\frac{1}{q}}^{\infty} \frac{g(u)}{u^{s+1}}\, du$$

est absolument convergente pour $\operatorname{Re} s > 0$ et, si l'on désigne par $G(s)$ sa valeur, la fonction G ainsi définie est holomorphe pour $\operatorname{Re} s > 0$.

On voit que

$$b_k = \frac{1}{\log q}\, G\left(1 + \frac{2k\pi i}{\log q}\right)$$

et on est ainsi amené à déterminer la fonction G.

D'abord, comme

$$g(u) = \int_0^u \left([qt] - q\,[t] - \frac{q-1}{2}\right) dt \quad \left(\text{et donc } g\left(\frac{1}{q}\right) = -\frac{q-1}{2q}\right),$$

une intégration par parties donne, pour $\operatorname{Re} s > 0$,

$$G(s) = -\frac{q-1}{2} \cdot \frac{q^{s-1}}{s} + \frac{1}{s} \int_{\frac{1}{q}}^{\infty} \left([qu] - q\,[u] - \frac{q-1}{2}\right) \frac{du}{u^s}.$$

Maintenant, si l'on suppose que $\operatorname{Re} s > 2$, on peut séparer l'intégrale en trois et l'écrire

$$\int_{\frac{1}{q}}^{\infty} \frac{[qu]}{u^s}\, du - q \int_{\frac{1}{q}}^{\infty} \frac{[u]}{u^s}\, du - \frac{q-1}{2} \int_{\frac{1}{q}}^{\infty} \frac{du}{u^s}.$$

On a

$$\int_{\frac{1}{q}}^{\infty} \frac{du}{u^s} = \frac{q^{s-1}}{s-1},$$

$$\int_{\frac{1}{q}}^{\infty} \frac{[u]}{u^s}\, du = \int_{1}^{\infty} \frac{[u]}{u^s}\, du = \frac{1}{s-1}\, \zeta(s-1)$$

d'après une formule connue [10]), et, par le changement de variable $u = \frac{t}{q}$,

$$\int_{\frac{1}{q}}^{\infty} \frac{[qu]}{u^s} du = q^{s-1} \int_1^{\infty} \frac{[t]}{t^s} du = \frac{q^{s-1}}{s-1} \zeta(s-1).$$

On trouve ainsi que, pour $\operatorname{Re} s > 2$,

$$G(s) = -\frac{q-1}{2} \cdot \frac{q^{s-1}}{s-1} + \frac{q^{s-1}-q}{s(s-1)} \zeta(s-1). \tag{12}$$

En raison de l'holomorphie de G, cette formule est valable pour $\operatorname{Re} s > 0$, $s \neq 1$.

En particulier, pour $k \neq 0$,

$$G\left(1 + \frac{2k\pi i}{\log q}\right) = \left(-\frac{q-1}{4k\pi i} + i\,\frac{q-1}{2k\pi}\left(1 + \frac{2k\pi i}{\log q}\right)^{-1} \zeta\left(\frac{2k\pi i}{\log q}\right)\right)\log q.$$

En examinant le comportement du second membre de (12) lorsque s tend vers 1, on retrouve le fait connu que $\zeta(0) = -\frac{1}{2}$ et on voit que

$$\begin{aligned} G(1) &= -\frac{q-1}{2} - \frac{q \log q}{2} - (q-1)\zeta'(0) \\ &= \frac{q-1}{2}(\log 2\pi - 1) - \frac{q \log q}{2} \text{ puisque } \zeta'(0) = -\frac{1}{2}\log 2\pi. \end{aligned}$$

On a ainsi les valeurs de b_k pour tous les $k \in \mathbf{Z}$, et on trouve en définitive que

$$c_0 = \frac{q-1}{2\log q}(\log 2\pi - 1) - \frac{q+1}{4}$$

---

[10]) On a pour $\operatorname{Re} s > 1$: $\zeta(s) = s\int_1^{\infty} \frac{[u]}{u^{s+1}} du$.

On peut le voir simplement en remarquant que l'on a pour tout N entier > 1

$$\begin{aligned} s\int_1^N \frac{[u]}{u^{s+1}} du &= \sum_{n=1}^{N-1} n \int_n^{n+1} \frac{s\,du}{u^{s+1}} = \sum_{n=1}^{N-1} n\left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s}\right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{2^s}\right) + 2\left(\frac{1}{2^s} - \frac{1}{3^s}\right) + 3\left(\frac{1}{3^s} - \frac{1}{4^s}\right) + \cdots + (N-1)\left(\frac{1}{(N-1)^s} - \frac{1}{N^s}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n^s} - \frac{N-1}{N^s}. \end{aligned}$$

et, pour $k \neq 0$,

$$c_k = i \frac{q-1}{2k\pi} \left(1 + \frac{2k\pi i}{\log q}\right)^{-1} \zeta\left(\frac{2k\pi i}{\log q}\right).$$

Comme, quand t tend vers l'infini,

$\zeta(it) = 0\left(|t|^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right)$ pour tout $\varepsilon > 0$,

on voit que la série de Fourier de F est absolument convergente.

(Reçu le 25 février 1975)

Hubert Delange
Université de Paris-Sud
Mathématiques
F-91405 Orsay

vide-leer-empty