

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 21 (1975)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** SUR UN THÉORÈME DE H. ZIESCHANG  
**Autor:** Calugareanu, G.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-47327>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 09.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# SUR UN THÉORÈME DE H. ZIESCHANG

par G. CALUGAREANU

Soit  $S$  une surface fermée orientable, de genre  $p$ , et  $N$  une courbe fermée simple (nœud) tracée sur  $S$ . Un théorème de H. Zieschang [1] entraîne les propriétés suivantes:

THÉORÈME. A) Si  $N$  ne sépare pas  $S$ , il existe un automorphisme<sup>1</sup> de  $S$  qui applique la courbe<sup>2</sup> canonique  $U_1$  (fig. 1) sur  $N$ .

B) Si  $N$  sépare  $S$  en deux domaines, il existe un automorphisme de  $S$  qui applique l'une des séparatrices canoniques  $\Gamma_i$  de  $S$  (fig. 1) sur  $N$ .

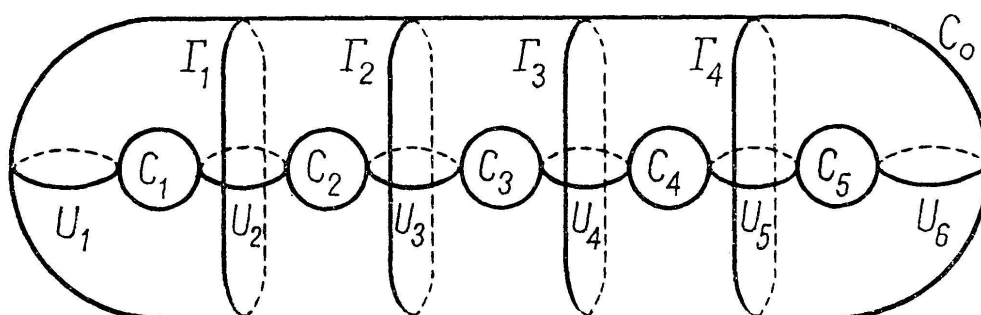


FIG. 1

Une seconde partie du théorème concerne les courbes simples sur les surfaces non-orientables; nous nous restreindrons ici au cas des surfaces orientables, ayant en vue l'intérêt de ce cas pour certaines considérations ayant trait à la théorie des nœuds [2].

Dans ce qui suit, nous nous proposons de donner une démonstration directe de ces propriétés, par des considérations géométriques, sans passer par l'intermédiaire du groupe fondamental de  $S$ . Les automorphismes de  $S$  que nous utiliserons sont les torsions<sup>3</sup> de  $S$  le long de certaines courbes simples de cette surface. Les remarques suivantes seront souvent appliquées dans la suite.

<sup>1</sup>) Application homéomorphe de  $S$  sur  $S$ .

<sup>2</sup>) Nous appelons courbes canoniques les courbes  $U_i$ ,  $C_i$  et  $\Gamma_i$  (fig. 1).

<sup>3</sup>) Pour une définition des torsions, voir [2, p. 104].

*Remarque I.* Soit  $N$  une non-séparatrice de  $S$  et  $C$  une courbe simple sur  $S$  qui traverse  $N$  en un seul point. Nous indiquons une torsion de  $S$  le long d'une bande convenable, de manière que, après cette torsion,  $N$  se trouve remplacée par une courbe homotope à  $C$ . La bande de torsion en question est indiquée sur la fig. 2 II, qui permet de voir que le segment  $\alpha\beta$  de  $N$  sera remplacé par l'arc  $\alpha\gamma\delta\varepsilon\beta$  (fig. 2 III), et la nouvelle courbe peut être contractée sur  $S$  de manière à se superposer à  $C$ . Remarquons encore que cette bande de torsion peut être placée d'un côté ou de l'autre de la courbe  $N$ , le résultat étant le même dans les deux cas.

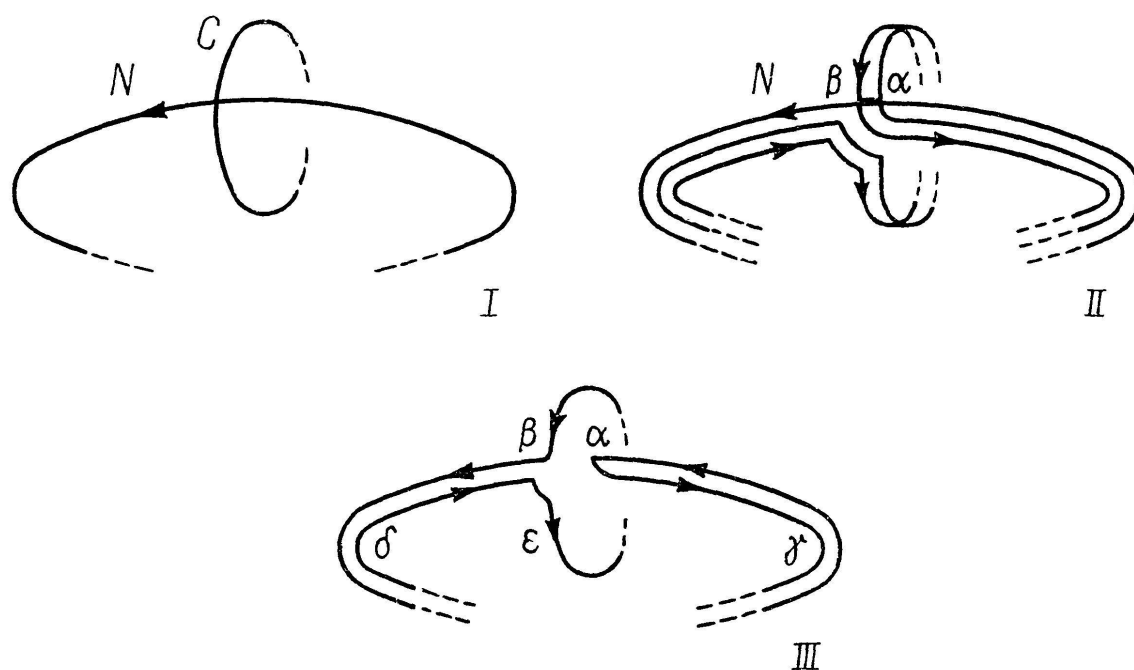


FIG. 2

*Remarque II.* La torsion de  $S$  le long de la bande indiquée plus haut est un automorphisme de  $S$ . Il en résulte que par un tel automorphisme suivi d'une déformation de  $S$  en elle-même (donc encore un automorphisme)  $U_1$  peut être appliquée sur  $C_1$ ,  $C_1$  sur  $U_2$ ,  $U_2$  sur  $C_3$ , ... ; chacune de ces courbes peut donc être appliquée sur l'une des autres, par un automorphisme de  $S$ .

*Carte d'un nœud sur  $S$ .* La surface  $S$  étant coupée le long des courbes appelées « coupures canoniques » (fig. 3), partant d'un même point de base sur  $S$ , on obtient le polygone canonique<sup>4</sup> de  $S$ ; la courbe simple  $N$  se trouve décomposée en plusieurs arcs disjoints ayant leurs extrémités sur les côtés du polygone; en choisissant le point de base sur  $S - N$ , aucun arc

<sup>4</sup>) Dans la suite, nous utiliserons l'abréviation « polygone » pour « polygone canonique ».

de  $N$  ne passe par un sommet du polygone, et l'on peut admettre qu'un tel arc n'a jamais ses deux extrémités sur un même côté du polygone car, dans pareil cas, une déformation (automorphisme) de  $S$  permet de supprimer

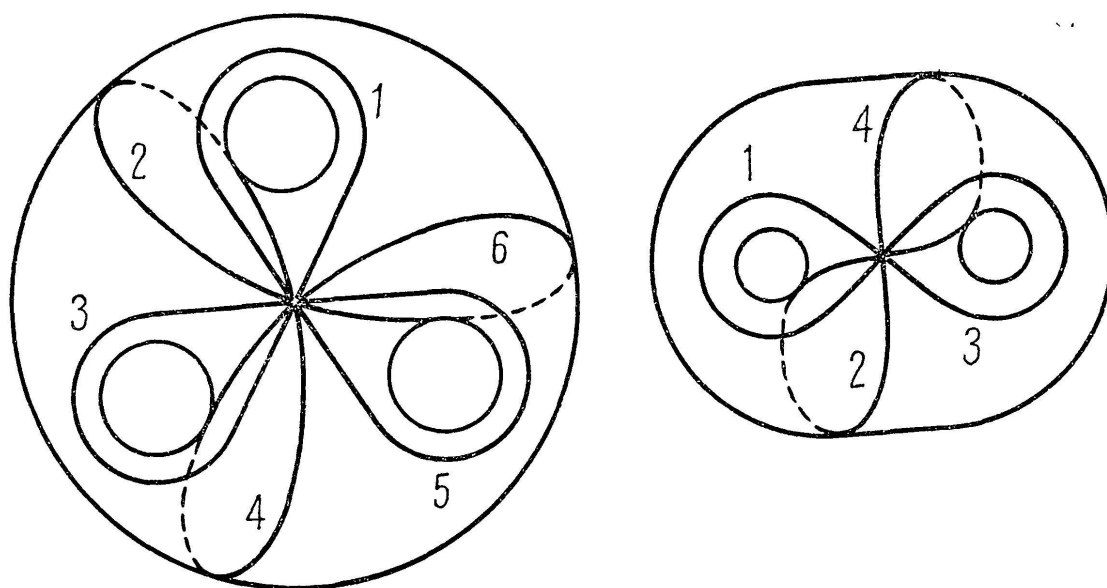


FIG. 3

cet arc par résorption à travers ce côté. Nous présenterons ce polygone sous la forme d'un disque ( $\gamma$ ) dont la frontière est un cercle  $\gamma$ , et les côtés du polygone, représentés par des arcs de  $\gamma$ , seront marqués par des indices, deux côtés provenant d'une même coupure canonique de  $S$  étant marqués par  $i$  et  $i'$  ( $i=1, 2, \dots, 2p$ ). Afin de rétablir le contact, existant sur  $S$ , de deux côtés conjugués  $i$  et  $i'$ , nous joindrons chaque paire  $i, i'$  de côtés conjugués par un ruban (fig. 4). Les arcs de  $N$  situés dans ( $\gamma$ ) seront prolongés sur les rubans par des arcs qui rétablissent la continuité de la courbe  $N$  (fig. 5). La figure ainsi obtenue est ce que nous appelons la *carte du nœud  $N$  sur  $S$* .

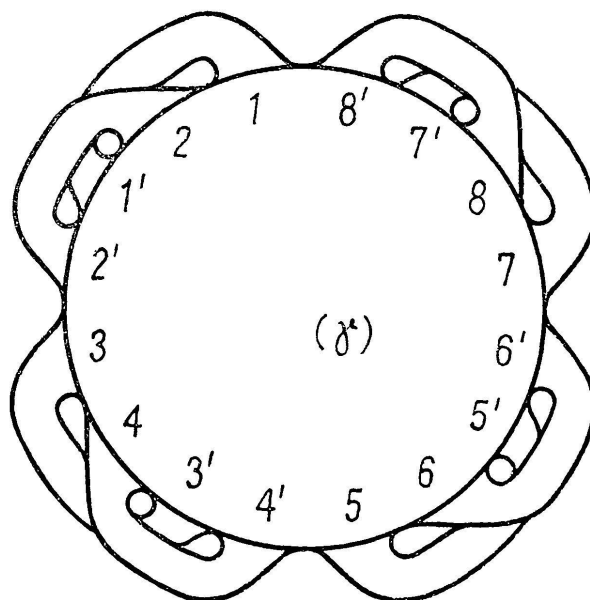


FIG. 4

Appelons *fréquence*  $\varphi$  de  $N$  le nombre (pair) des points où  $N$  traverse le cercle  $\gamma$ . Les arcs de  $N$  situés dans ( $\gamma$ ) décomposent ce disque en plusieurs 2-cellules  $Q_k$ , qui sont des domaines plans simplement connexes. La frontière



$\partial Q_k$  d'une telle cellule est formée d'arcs de  $N$  alternant avec des arcs du cercle  $\gamma$ , et, comme nous l'avons vu, nous pouvons admettre qu'un arc de  $N$  n'a jamais ses deux extrémités sur un même côté  $i$  ou  $i'$ .

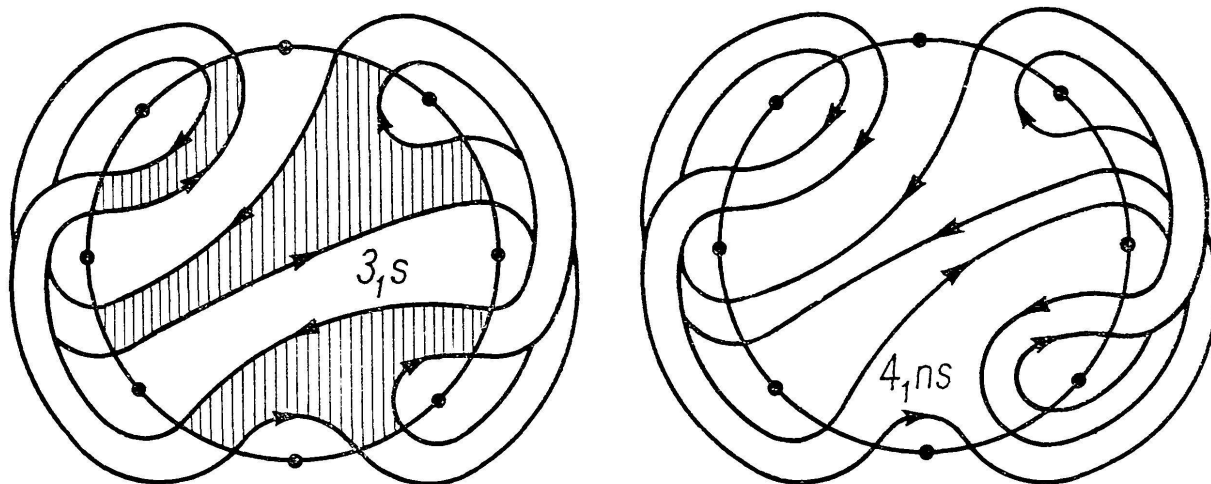


FIG. 5

$N$  étant orienté, nous dirons qu'une cellule  $Q_k$  est *N-orientable* si, en orientant  $\partial Q_k$  positivement (aire à gauche) cette orientation induit sur tous les arcs de  $N$  qui appartiennent à  $\partial Q_k$  l'orientation choisie sur  $N$  ou bien l'orientation contraire à celle de  $N$ . Dans le premier cas nous dirons que  $Q_k$  est  $(+N)$  orientable, et dans le second cas,  $(-N)$  orientable. Lorsque  $\partial Q_k$  n'est pas  $N$ -orientable, nous dirons que  $Q_k$  est *non-N-orientable*; nous aurons alors sur  $\partial Q_k$  des arcs de  $N$  sur lesquels  $\partial Q_k$  induit la même orientation que  $N$ , mais aussi des arcs de  $N$  sur lesquels  $\partial Q_k$  induit l'opposée de l'orientation induite par  $N$ , et cela quelles que soient les orientations choisies pour  $\partial Q_k$  et  $N$ . Notre fig. 5 présente la carte du nœud  $3_1$  séparateur de la surface de genre  $p = 2$ , ainsi que celle du nœud  $4_1$  qui ne sépare pas cette surface. On remarque que dans le premier cas toutes les cellules sont  $N$ -orientables, ce qui est évident lorsque  $N$  sépare  $S$ , tandis que dans le second cas nous avons des cellules non- $N$ -orientables.

Si toutes les cellules  $Q_k$  sont  $N$ -orientables, il n'en résulte pas que  $N$  sépare  $S$ , sans une restriction que nous préciserons; de toute façon nous pouvons alors répartir les  $Q_k$  en deux classes: classe I, contenant toutes les cellules  $(+N)$  orientables, et classe II, contenant les cellules  $(-N)$  orientables. Aucune de ces classes n'est vide, car chaque arc de  $N$  appartient à la frontière d'une cellule de classe I et à la frontière d'une cellule de classe II. On remarque aussi que si toutes les cellules sont  $N$ -orientables, et si l'on envisage les arcs de  $N$  au voisinage de leurs extrémités sur  $\gamma$ , en parcourant

le cercle  $\gamma$ , on rencontre alternativement des arcs de  $N$  dirigés vers l'intérieur ou vers l'extérieur de  $(\gamma)$ .

Montrons d'abord que si la carte de  $N$  contient au moins une cellule non- $N$ -orientable, une torsion convenable permet de diminuer la fréquence de  $N$ , en appliquant la Remarque I.

Soit donc  $Q$  une cellule non- $N$ -orientable. Sur  $\partial Q$  nous avons donc deux arcs de  $N$  dont les orientations (imposées par celle de  $N$ ) sont discordantes. Soient  $v_1$  et  $v_2$  ces arcs (fig. 6) que nous pouvons supposer consécutifs sur  $\partial Q$ , donc séparés par un seul arc de  $\gamma$  appartenant à  $\partial Q$ .

En changeant au besoin l'orientation

de  $N$ , nous pouvons admettre que  $v_1$  et  $v_2$  sont dirigés vers l'intérieur de  $(\gamma)$ .

Soient  $q_1$  et  $q_2$  les points où  $v_1$  et  $v_2$  traversent  $\gamma$ . Soit  $u$  un point intérieur à  $Q$ , voisin de  $v_1$ .

A partir de  $u$  menons un chemin  $K$  parallèle à  $N$  (en traits interrompus sur la fig. 6) que nous prolongerons jusqu'à ce qu'il passe au voisinage de  $v_2$ , en arrivant au point  $v$ .

Remarquons que  $v$  se trouve dans une cellule ayant  $v_2$  sur sa frontière, mais différente de  $Q$ , et que l'arc  $K$  arrive en  $v$  avant de passer par  $q_1$  (la courbe  $K$  pro-

longée au delà de  $v$ , parallèlement à  $K$ , devant se fermer en  $u$ ). En joignant  $v$  à  $u$  par un arc simple qui traverse  $v_2$  en un point, on a une courbe simple  $K \cup uv = C$  qui traverse  $N$  en un seul point et dont la fréquence est  $\varphi' < \varphi$ , car à chaque point où  $C$  traverse  $\gamma$  correspond un point voisin où  $N$  traverse  $\gamma$ , mais  $C$  ne traverse pas  $\gamma$  au voisinage de  $q_1$  (au moins).

L'application répétée de cette remarque nous conduit, tant que la carte du nœud contient des cellules non- $N$ -orientables, à faire diminuer la fréquence du nœud. Mais on peut arriver à un nœud  $N$  dont la carte ne contient que des cellules  $N$ -orientables, et cela peut arriver même si  $N$  ne sépare pas la surface  $S$ . Pour traiter ce cas, il sera utile d'établir le

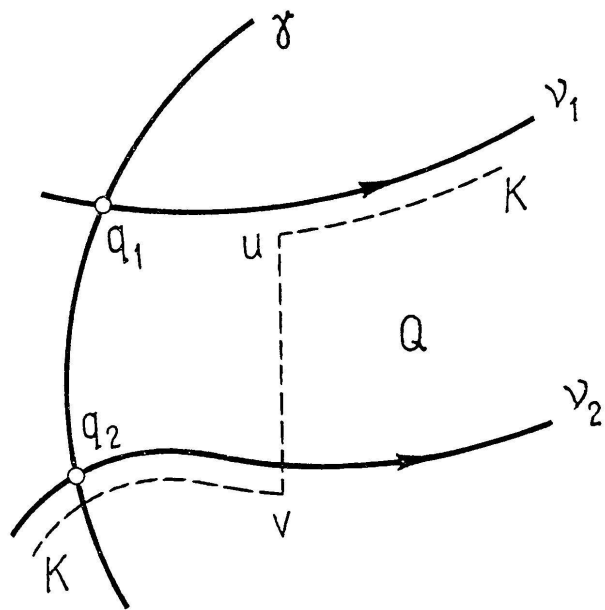


FIG. 6

LEMME. Si le nombre des points où  $N$  traverse un côté quelconque du polygone est pair (éventuellement zéro),  $N$  divise la surface  $S$  en deux domaines.

Montrons que, dans les conditions du lemme, toute courbe fermée simple traverse  $N$  en des points dont le nombre est pair. Le lemme en résulte

LEMME. Si le nombre des points où  $N$  traverse un côté quelconque du polygone est pair (éventuellement zéro),  $N$  divise la surface  $S$  en deux domaines.

Montrons que, dans les conditions du lemme, toute courbe fermée simple traverse  $N$  en des points dont le nombre est pair. Le lemme en résulte

alors car, si  $N$  ne divise pas  $S$ , on construit immédiatement une courbe fermée simple qui traverse  $N$  en un seul point; il suffit de construire un segment  $ab$  qui traverse  $N$  en un seul point,  $a$  et  $b$  étant d'un côté et de l'autre de  $N$  et assez rapprochés;  $S-N$  étant un domaine connexe, on peut joindre  $a$  à  $b$  par un arc sur  $S$  qui ne rencontre pas  $N$ . Alors cet arc, fermé par le segment  $ab$ , fournit la courbe en question.

Soit  $C$  une courbe fermée simple sur  $S$ . Considérons la carte de  $N$  et représentons la carte de  $C$  sur le même polygone. Remarquons que, en déformant continument  $N$  ou  $C$  sur  $S$ , le nombre des points d'intersection  $N \cap C$  peut varier, mais la parité de ce nombre se conserve, si l'on exige que  $N$  et  $C$  se coupent transversalement en chaque point d'intersection. Divisons chaque côté du polygone en deux arcs; nous pouvons alors déformer  $N$  et  $C$  de manière que les points où  $N$  traverse un côté se trouvent sur l'une des moitiés de ce côté et les points où  $C$  le traverse se trouvent sur l'autre moitié. Après cela on voit que, sur chaque ruban, les arcs de  $N$  et de  $C$  vont parallèlement sans se rencontrer. Les points de  $N \cap C$  se trouvent donc dans  $(\gamma)$ . Déformons maintenant les arcs de  $C$  de manière à les rapprocher du cercle  $\gamma$ , jusqu'à ce qu'ils se trouvent tous dans un voisinage assez mince de  $\gamma$ , situé à l'intérieur de  $(\gamma)$ . On voit bien que cela peut se faire sans que les arcs de  $C$  se rencontrent (fig. 7 I et II). Mais alors

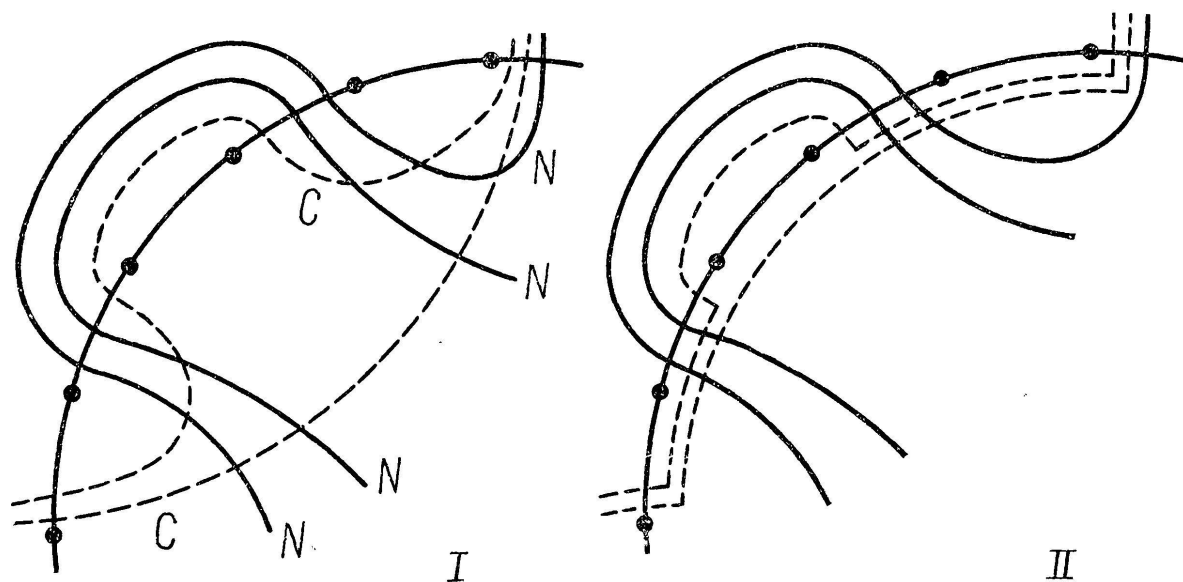


FIG. 7

chaque arc de  $C$  qui traverse un arc de  $N$  traverse aussi tous les arcs de  $N$  venant du même côté du polygone, donc, cet arc de  $C$  traverse un nombre pair d'arcs de  $N$ . Il en résulte que  $C$  traverse  $N$  sur un nombre pair d'arcs, ce qui démontre le lemme. Il s'ensuit que chaque cellule de la carte de  $N$

est  $N$ -orientable, donc, au voisinage de  $\gamma$ , les arcs de  $N$  sont dirigés alternativement vers l'intérieur et l'extérieur de  $(\gamma)$ , si on les observe en parcourant  $\gamma$  dans un sens quelconque.

COROLLAIRE. *La condition nécessaire et suffisante pour que  $N$  divise la surface  $S$  est que, sur la carte de  $N$ , chaque côté du polygone contienne un nombre pair de points où  $N$  traverse  $\gamma$ .*

La condition est évidemment nécessaire, car chaque coupure canonique est une courbe fermée qui passe alternativement dans l'un ou l'autre des domaines de  $S - N$ . La suffisance résulte du lemme.

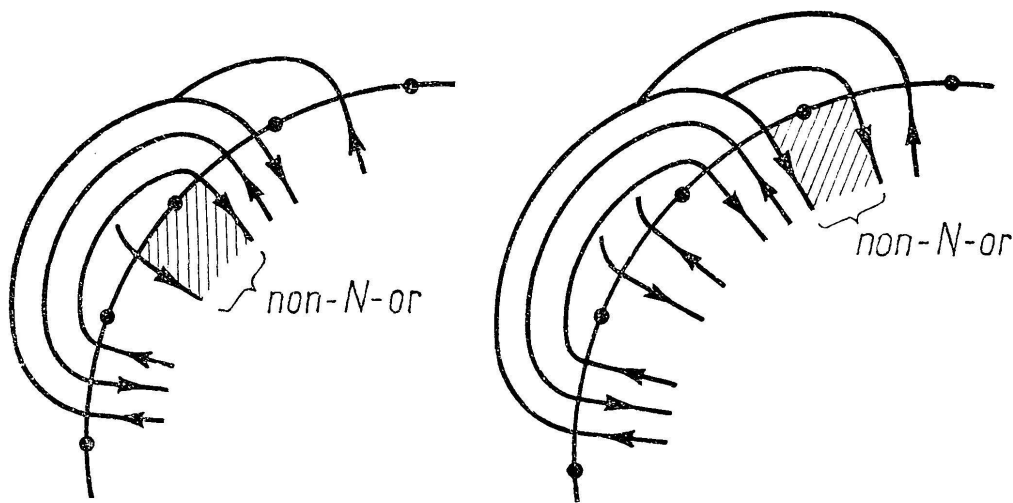


FIG. 8

Si  $N$  n'est pas une séparatrice de  $S$ , il existe donc au moins deux côtés (conjugués) du polygone qui portent chacun le même nombre *impair* de points de  $N$ . Si les deux côtés conjugus adjacents aux précédents (fig. 8) contiennent aussi des points de  $N$ , on voit que la carte de  $N$  contient nécessairement des cellules non- $N$ -orientables. Mais si ces côtés adjacents ne contiennent pas des points de  $N$ , l'existence d'une cellule non- $N$ -orientable n'est pas assurée. Si  $N$  traverse une seule fois un côté du polygone (et son conjugué) et ne traverse pas les côtés conjugus adjacents (fig. 9), on trace immédiatement une courbe fermée qui traverse  $N$  une seule fois et possède la fréquence 2, ce qui, par application de la remarque I, permet de vérifier la par-

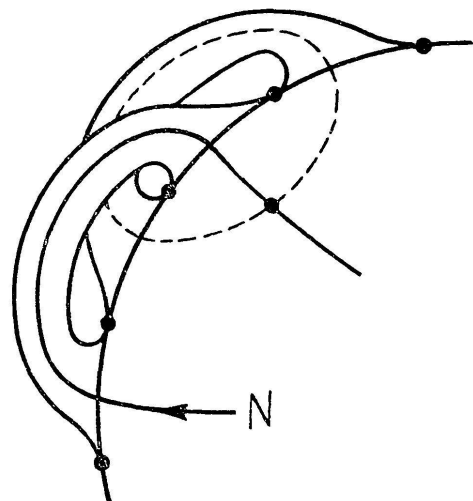


FIG. 9

tie A) du théorème. Reste le cas où  $N$  traverse chacun de deux cotés conjugués du polygone en un nombre impair  $\geq 3$  de points, et ne traverse pas les côtés conjugués adjacents aux précédents (fig. 10). La fig. 10 permet

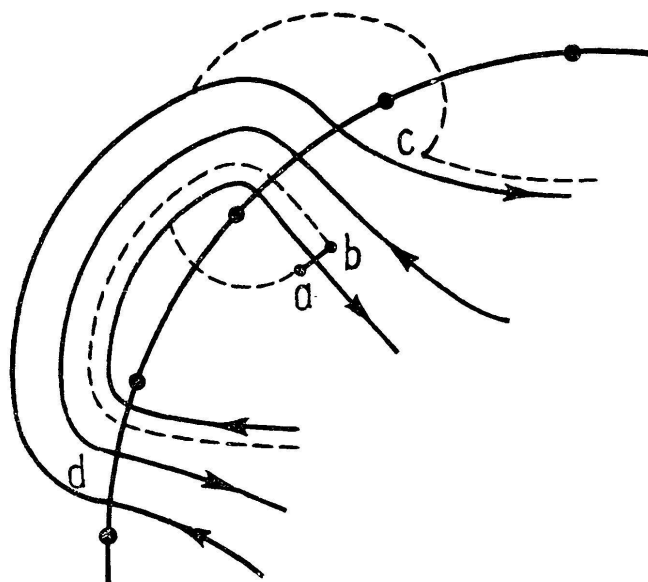


FIG. 10

de constater l'existence d'un chemin (en traits interrompus) qui part de  $a$  et arrive en  $c$ , en passant par le ruban qui ne contient aucun arc de  $N$ . En arrivant en  $c$  sur la gauche de  $N$ , ce chemin court parallèlement à  $N$  jusqu'à son arrivée en  $b$ , puis le segment  $ba$  ferme ce contour qui traverse  $N$  en un seul point. Sa fréquence est inférieure à celle de  $N$ , car ce contour ne passe pas par  $d$  et  $e$ , ce qui arriverait seulement si on le prolongeait parallèlement à  $N$  jusqu'à sa fermeture en  $c$ . Ainsi, la Remarque I est applicable à tous les cas, ce qui établit la partie A) du théorème, car, par application répétée de la Remarque I, la fréquence de  $N$  pourra être diminuée jusqu'à la valeur 2, et alors  $N$  sera nécessairement réduite à une coupure canonique.

Passons à la partie B) du théorème.

Supposons que  $N$  sépare  $S$  en deux domaines  $\Delta$  et  $\Delta'$ . En admettant que le point de base appartienne à  $\Delta'$ , aucune cellule appartenant à  $\Delta$  ne possède des sommets du polygone sur sa frontière. Dans chaque cellule  $Q_k \subset \Delta$  choisissons un point intérieur  $\alpha_k$ ; sur chaque arc de  $\gamma$  appartenant à  $\partial Q_k$  choisissons un point  $\beta_k^j$  intérieur à cet arc; joignons chaque  $\beta_k^j$  à  $\alpha_k$  par un arc simple intérieur à  $Q_k$ , de manière que ces arcs ne se rencontrent qu'au point  $\alpha_k$ . Cette construction étant faite pour chaque cellule  $Q_k \subset \Delta$ , si deux points  $\beta_k^j$  et  $\beta_h^l$  se trouvent aux deux bouts d'un même ruban, joignons ces points par un arc simple intérieur à ce ruban. L'ensemble de tous ces arcs

en pointillé sur la fig. 11 I) forme un graphe  $K$  (fig. 11 II) qui est un rétracte de déformation du domaine  $\Delta$ . Ce graphe présente des sommets d'ordre  $> 2$  intérieurs à  $(\gamma)$ , sans quoi  $\Delta$  formerait une bande unique qui, étant

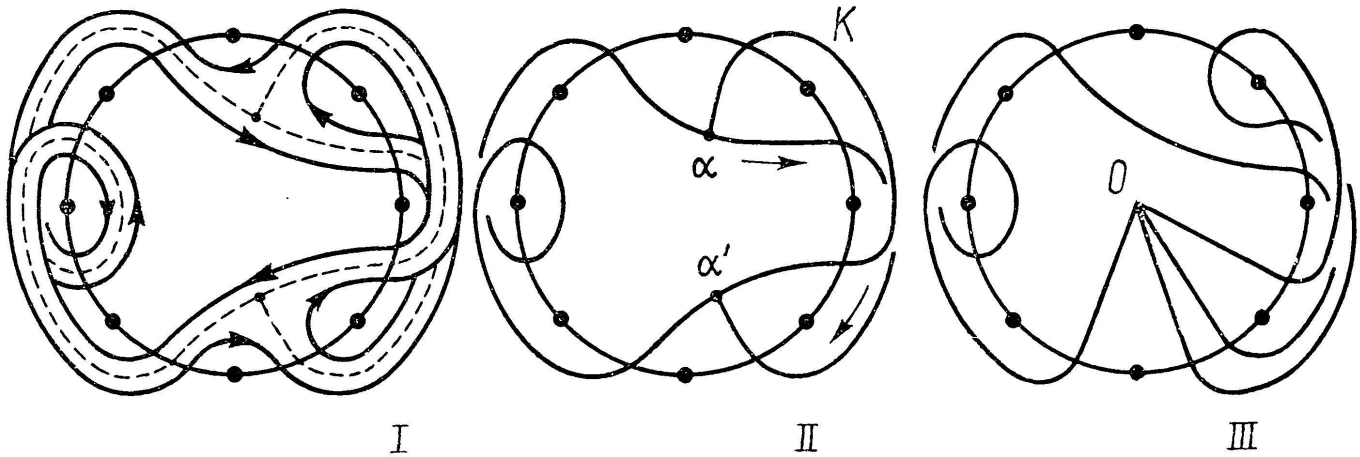


FIG. 11

orientable, aurait une frontière à deux composantes, contrairement à notre hypothèse. En contractant certaines arêtes de  $K$  on peut obtenir un autre graphe ayant un seul sommet multiple (fig. 11 III). Nous supposons que cette opération a déjà été effectuée sur  $K$ ; en plaçant le sommet au centre  $O$  du cercle  $\gamma$ ,  $K$  sera formé par plusieurs rayons de  $\gamma$ , par certains arcs intérieurs à  $(\gamma)$  et d'autres arcs intérieurs aux rubans de la gerbe (rubans que nous omettons sur les fig. 11 pour une meilleure visibilité). On voit que la contraction que nous venons d'effectuer sur  $K$  correspond à une déformation de  $\Delta$  sur  $S$ , donc à un automorphisme de  $S$ . De cette manière,  $\Delta$  prend la forme d'un disque central auquel sont attachés plusieurs rubans (fig. 12) et dont la frontière résulte de  $N$  par déformation isotope sur  $S$ . Nous appellerons *gerbe de  $N$*  une telle surface  $G$ . Chaque ruban, ayant ses deux bouts attachés au disque central, sera appelé une *boucle de la gerbe  $G$* , et nous appellerons aussi *boucle du graphe  $K$*  chaque arc de  $K$  ayant ses deux extrémités au sommet unique de  $K$ . Remarquons que le graphe  $K$  ne divise pas  $S$ , car la rétraction

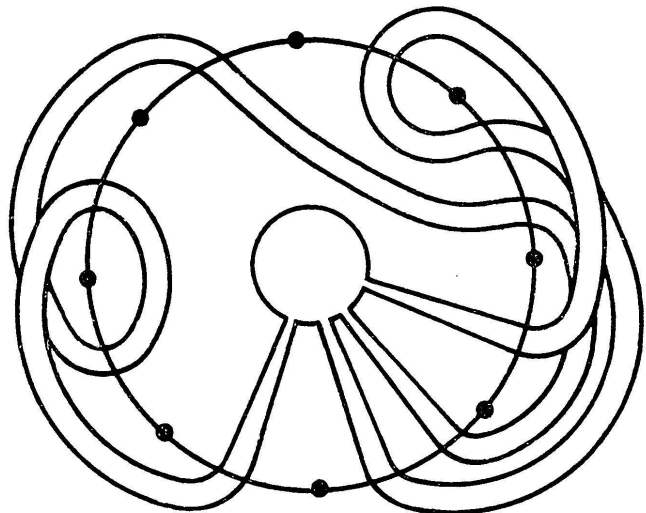


FIG. 12



de  $\Delta$  sur  $K$  s'accompagne d'une dilatation de  $\Delta'$  sur  $S-K$ . Or,  $K$  divise  $(\gamma)$  en cellules simplement connexes que nous désignerons encore par  $Q_k$  et l'on voit que deux points appartenant respectivement à deux cellules quelconques peuvent être joints par un arc simple intérieur à  $G-K$ , en passant par les rubans. Pour démontrer la proposition B), nous appliquerons sur  $K$  une suite d'opérations que nous appelons des *glissements*, puis des torsions, de manière à donner au graphe  $K$  une forme canonique qui entraîne immédiatement la proposition B). On doit se rappeler que chaque opération ainsi effectuée sur  $K$  traduit la même opération effectuée sur la gerbe  $G$ .

Une gerbe  $G$  est donc une surface orientable dont la frontière est connexe. Le graphe  $K \subset G$ , qui en est un rétracte de déformation, est formé par plusieurs boucles  $C_i$  ayant en commun leurs extrémités au point  $O$ . Soit  $n$  le nombre de ces boucles. Choisissons un sens positif de parcours sur  $\gamma$  et marquons par les indices  $1, 2, \dots, 2n$  les points d'intersection des courbes  $C_i$  avec  $\gamma$ , l'ordre de succession de ces points sur  $\gamma$  coïncidant avec l'ordre

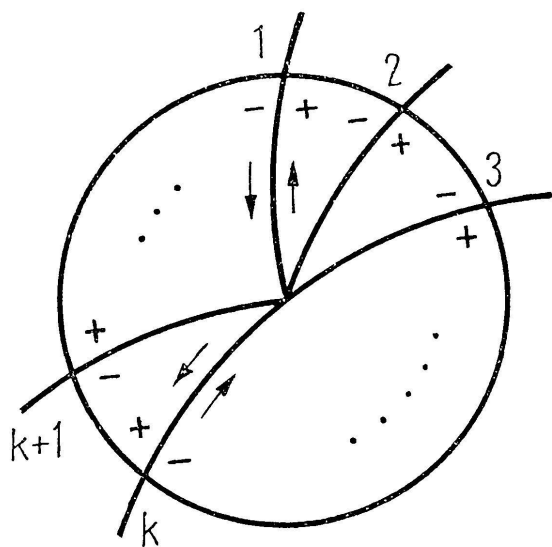


FIG. 13

naturel des indices. A chaque entier  $k$  entre 1 et  $2n$  il correspond un indice  $f(k)$ , si  $k$  et  $f(k)$  représentent les points d'intersection de la courbe  $C_k$  avec  $\gamma$ , pour  $k = 1, 2, \dots, 2n$ . L'application  $f$  est une permutation de la suite  $1, 2, \dots, 2n$  et se décompose en cycles binaires, donc  $ff(k) = k$ . Marquons, au voisinage de  $\gamma$ , les bords de chaque  $C_k$  des signes  $+$  et  $-$ , ces signes se suivant alternativement le long de  $\gamma$  (fig. 13). On voit alors que, en parcourant le bord de  $G$  dans un sens convenable, on sort

de  $(\gamma)$  sur le bord  $+$  de  $C_k$ , et l'on rentre sur le bord  $-$  de  $C_{f(k)}$ , on ressort sur le bord  $+$  de  $C_{f(k)-1}$  et l'on rentre sur le bord  $-$  de  $C_{f[f(k)-1]}$ , etc.

Soit  $(i, j), j = f(i)$ , un couple d'indices conjugués, en ce sens qu'ils correspondent aux points d'intersection d'une boucle avec  $\gamma$ . Remplaçons le rayon  $i-1$  par un arc de courbe intérieure à  $(\gamma)$ , qui joint le point  $i-1$  (sur  $\gamma$ ) à un point  $P$  du rayon  $i$  (fig. 14 II) situé sur le bord  $-$  de ce rayon, puis, en faisant glisser le point  $P$  sur la courbe  $C_i$  qui joint  $i$  à  $j$  sur  $G$ , prolongeons l'arc  $(i-1, P)$  par un arc sur  $G$  assez voisin de  $C_i$  pour qu'il ne rencontre aucune autre boucle de  $K$ . Le point  $P$  arrivera sur le bord  $+$

du rayon  $j$  (fig. 14 III) et, finalement sera amené en  $O$ , le rayon  $i - 1$  se trouvant déplacé entre les rayons  $j$  et  $j + 1$  (fig. 14 IV). A cette opération sur  $K$ , que nous appelons un *glissement*, correspond une transformation

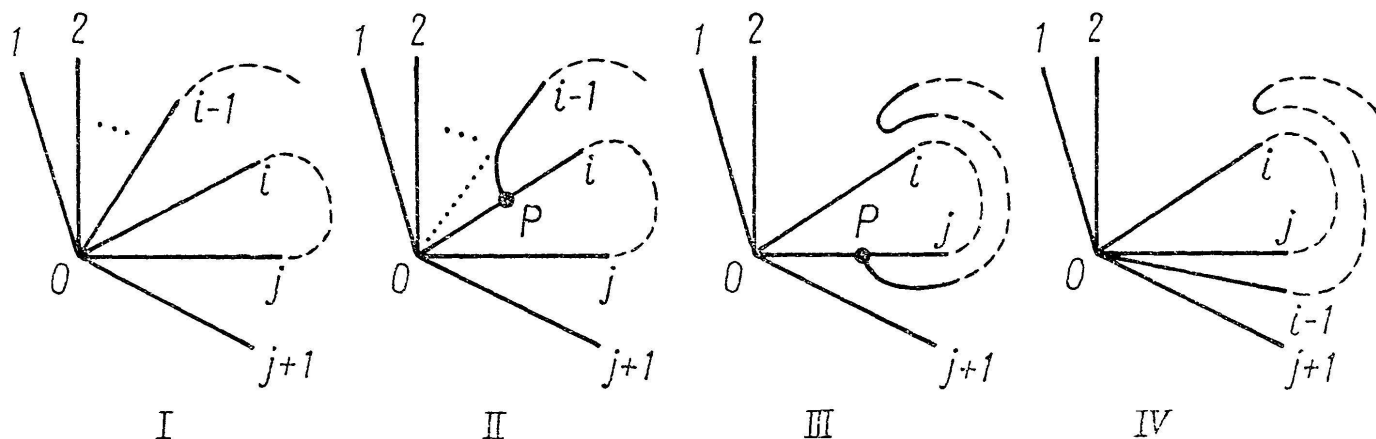


FIG. 14

de la gerbe  $G$  qui est une déformation isotope sur  $S$ , donc un automorphisme de  $S$ . Un glissement analogue peut être effectué en prenant  $P$  sur le bord  $+$  du rayon  $i$ , ce qui permet de déplacer le rayon  $i + 1$  entre  $j - 1$  et  $j$ .

Remarquons que  $i$  et  $j$  étant conjugués, les rayons correspondants appartiennent à une même boucle de  $K$ ; il existe alors entre  $i$  et  $j$  un indice  $k$  dont le conjugué  $f(k)$  n'est pas compris entre  $i$  et  $j$ , sans quoi le bord de  $K$  ne formerait pas une courbe unique, contrairement à notre hypothèse; en effet, si  $k$  et  $f(k)$  étaient compris entre  $i$  et  $j$ , le bord de  $K$  aurait au moins deux composantes. Admettons  $f(k) < i$ , le cas  $f(k) > j$  se ramenant au précédent par un changement du sens positif sur  $\gamma$ . Déplaçons successivement, par glissement, les rayons  $i - 1, i - 2, \dots, f(k) + 1$  entre  $j$  et  $j + 1$ ; il ne restera alors aucun rayon entre  $f(k)$  et  $i$  (fig. 15 I, II). Déplaçons

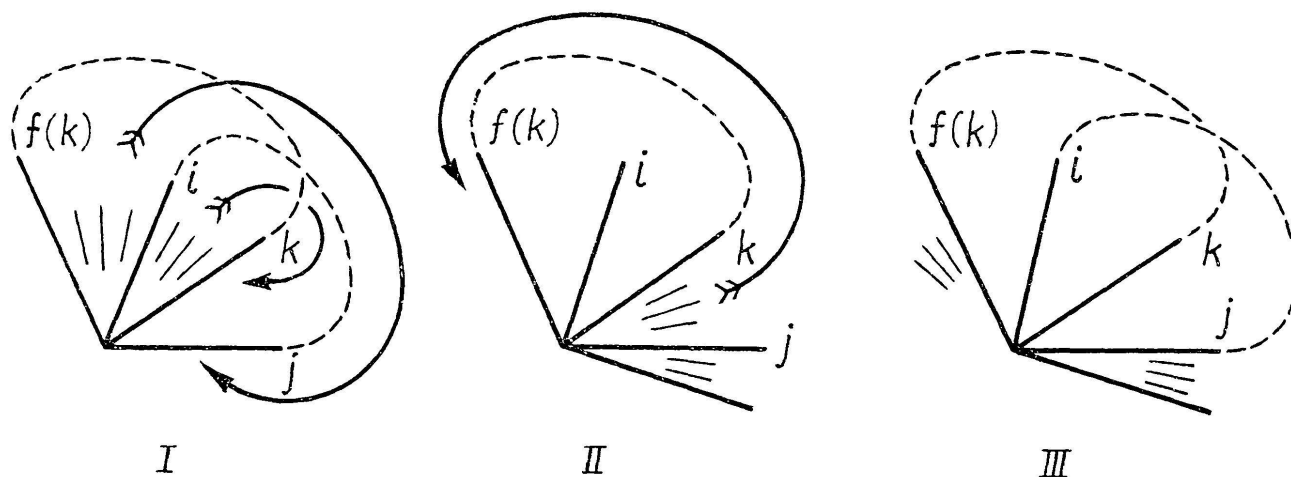


FIG. 15



ensuite les rayons  $i + 1, i + 2, \dots, k - 1$  sur le bord  $+$  du rayon  $i$ , ce qui amène ces rayons entre  $j - 1$  et  $j$  (fig. 15 I, II), et continuons avec les rayons situés entre  $k$  et  $j$ , que nous déplacerons sur le bord  $+$  de  $k$ , en les amenant entre  $f(k) - 1$  et  $f(k)$  (fig. 15 III). On obtient ainsi un quadruplet  $k, f(k), i, j = f(i)$ , aucun rayon n'existant entre  $k$  et  $f(k)$ , entre  $f(k)$  et  $i$ , ou entre  $i$  et  $j$ . Les rayons  $k$  et  $f(k)$  sont joints par une courbe sur  $G$ , de même que  $i$  et  $j$ , et le nouveau graphe  $K$  correspond encore à une gerbe dont le bord est connexe. En laissant inchangé le quadruplet ainsi obtenu, on peut reprendre l'opération sur les rayons restants, ce quadruplet permettant le passage du point  $P$  d'un côté ou de l'autre du quadruplet déjà formé. On arrive ainsi à la formation de plusieurs quadruplets et, si  $n$  était impair, il resterait finalement un couple de rayons conjugués consécutifs donc joints par un arc. Mais alors le bord de  $K$  ne serait pas connexe, contrairement à notre hypothèse. Il en résulte que  $n$  est nécessairement un nombre pair, et le nombre des rayons de  $K$  est un multiple de 4. Le graphe  $K$  contient donc  $2k$  boucles,  $k \geq 1$ . On a  $k \leq p$ , car dans chaque quadruplet on peut choisir une boucle de manière à obtenir  $k$  courbes homotopiquement distinctes et disjointes sur  $G$ , et l'on sait que,  $S$  étant de genre  $p$ , cette surface ne peut porter plus de  $p$  telles courbes disjointes. Les opérations que nous venons d'indiquer nous conduisent donc à un graphe  $K$  dont les rayons sont distribués en  $k$  quadruplets autour de  $O$ ; c'est ce que nous appelons un *graphe canonique de  $N$* ; la gerbe correspondente sera appelée une *gerbe canonique de  $N$* .

Quittons maintenant la carte de  $N$  pour revenir à la surface  $S_p$ . Figurons la gerbe  $G$  sur  $S_p$ ; elle est formée de  $2k$  rubans attachés à un disque central, et les boucles sont disposées en quadruplets autour de ce disque central.

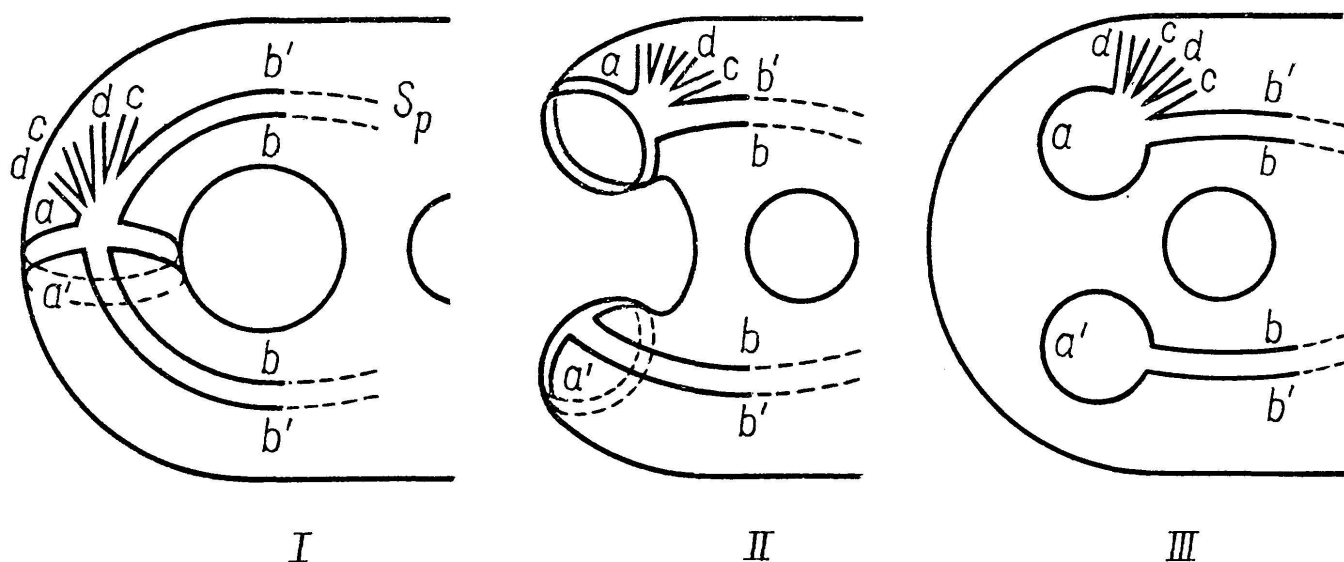


FIG. 16

La surface  $S_p - G$  étant connexe, chaque boucle de  $G$  prise séparément ne sépare pas  $S_p$ . En appliquant la partie A) du théorème, nous voyons qu'il existe un automorphisme de  $S_p$  qui applique la boucle  $a, a'$  sur la coupure canonique 1 (fig. 16 I).

Afin d'appliquer l'induction sur l'entier  $p$ , admettons que sur une surface  $S_{p-1}$ , de genre  $p - 1$ , une gerbe à  $2k$  boucles ( $k \leq p - 1$ ) peut être réduite à la forme canonique par des torsions sur  $S_{p-1}$ . En revenant à  $S_p$ , coupons cette surface le long d'un cercle situé entre  $a$  et  $a'$  (fig. 16 II) et appliquons ensuite des disques sur les deux fenêtres apparues sur  $S_p$ . On obtient une  $S_{p-1}$  (fig. 16 III) sur laquelle  $N$  est formé par deux cercles  $a, a'$  joints par deux courbes parallèles  $b, b'$ , les boucles restantes  $c, c', d, d', \dots$  étant attachées au cercle  $a$ . Les cercles  $a, a'$  avec le ruban  $b, b'$  renferment un domaine simplement connexe de  $S_{p-1}$  qui peut servir de disque central à la gerbe  $c, c', d, d', \dots$ . Par l'hypothèse d'induction, une suite de torsions de  $S_{p-1}$  permettent de réduire la gerbe  $c, c', d, d', \dots$  à la forme canonique.

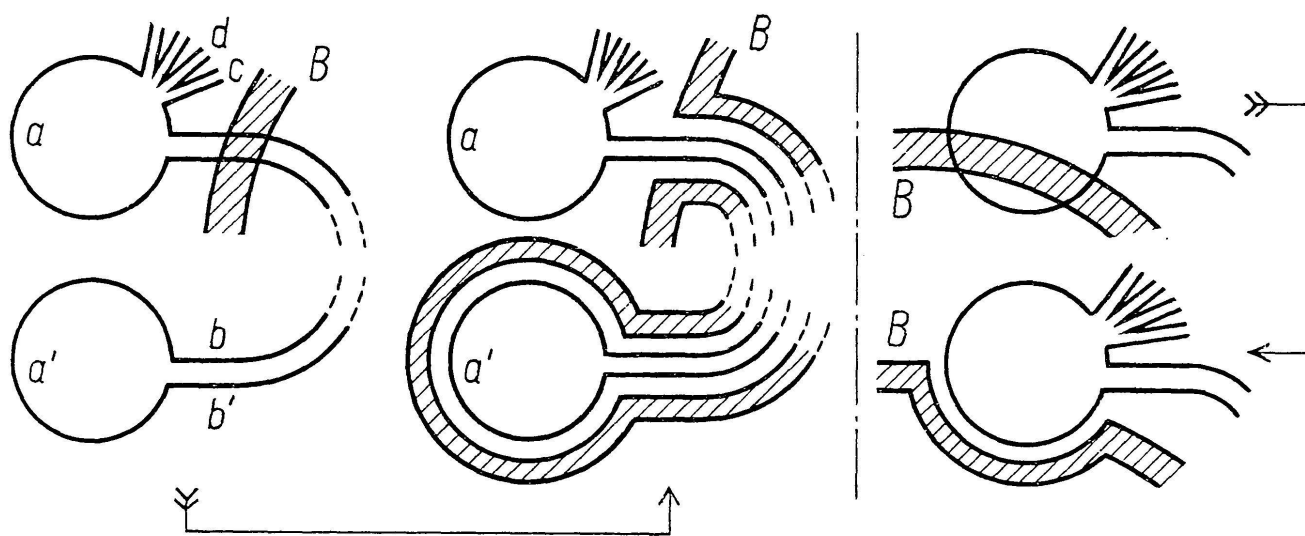


FIG. 17

Si une bande de torsion  $B$  traverse  $a$  ou  $a'$ , ou le ruban  $b, b'$ , on peut la modifier (fig. 17) de manière qu'elle contourne ces obstacles.

Enlevons les disques placés précédemment sur les deux fenêtres et recollons les bords de celles-ci, en retrouvant  $S_p$ . Sur  $S_p$  nous avons maintenant la boucle  $a, a'$  qui est canonique, de même que les boucles  $c, c', d, d', \dots$ , mais la boucle  $b, b'$  n'est pas canonique. Remarquons que les torsions qui nous ont conduits à cette situation ne nécessitent pas la coupure de  $S_p$  entre  $a$  et  $a'$  et la construction de  $S_{p-1}$ , car ces torsions ont été choisies de manière à éviter les cercles  $a, a'$  et courbes  $b, b'$ . Elles peuvent donc être effectuées directement sur  $S_p$ . Afin de ramener la boucle  $b, b'$  à la forme

canonique, il suffit de reprendre les mêmes opérations sur la boucle  $c, c'$  (qui est canonique), en passant de nouveau à une  $S_{p-1}$ , etc. Par de nouvelles torsions qui évitent  $c$  et  $c'$ , on « canonise »  $b$  et  $b'$  et l'on obtient sur  $S_p$  une gerbe canonique  $a, a', b, b', c, c', \dots$

Vérifions l'hypothèse d'induction pour  $p = 2$ , car, pour  $p = 1$ , toute courbe simple séparatrice est contractible en un point du tore. Or, dans le cas  $p = 2$ , on a  $k = 1$  ou  $k = 2$ . Si  $k = 1$ , la gerbe est formée par deux boucles  $a, a'$  et  $b, b'$ . L'opération déjà décrite plus haut remplace  $a, a'$  par

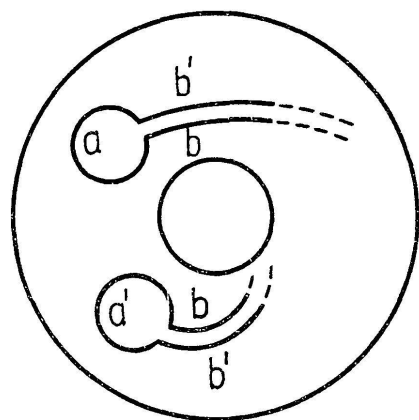


FIG. 18

une boucle canonique et, après coupure  $S_2$  est remplacé par un tore sur lequel  $N$  est formé par les cercles  $a$  et  $a'$  (fig. 18) joints par deux arcs simples parallèles  $b, b'$ . Le ruban  $b, b'$  tourne un certain nombre de fois dans le sens des méridiennes et un nombre de fois dans le sens des longitudes du tore. On voit alors que si l'on applique des torsions sur des bandes méridiennes ou longitudinales du tore, le ruban  $b, b'$  peut être réduit à deux arcs de longitudes. En recollant  $a$  et  $a'$  on

retrouve  $S_2$ , sur laquelle la gerbe peut facilement être déformée de manière à donner l'unique séparatrice canonique de  $S_2$  (fig. 19).

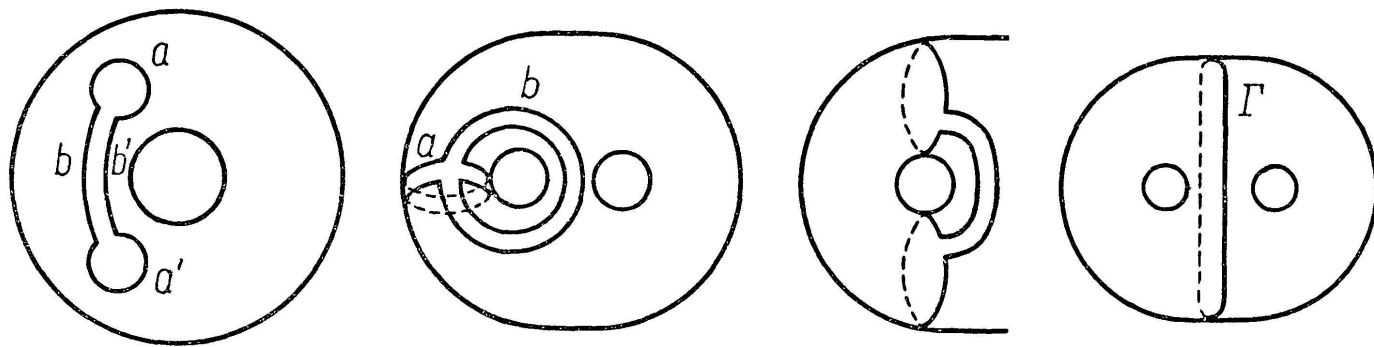


FIG. 19

Si  $k = 2$ , la gerbe contient 4 boucles et les mêmes opérations conduisent à un tore sur lequel  $N$  est formé par deux cercles  $a, a'$  joints par les boucles  $b, b', c, c', d, d'$ . Comme précédemment, on amène  $b, b'$  sur un arc de longitude (fig. 20). Ensuite, par des torsions méridiennes ou longitudinales qui évitent  $a, a', b, b'$ , on amène  $c, c'$  sur une longitude; alors, par des torsions longitudinales,  $d, d'$  sera amené sur une courbe homotope à une méridienne, puisque deux rubans de la gerbe ne se rencontrent que sur le disque central, et cette propriété se conserve par les automorphismes de la

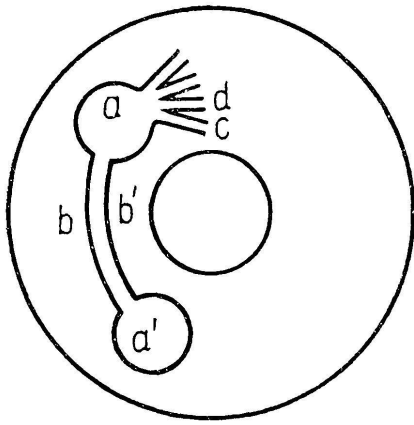


FIG. 20

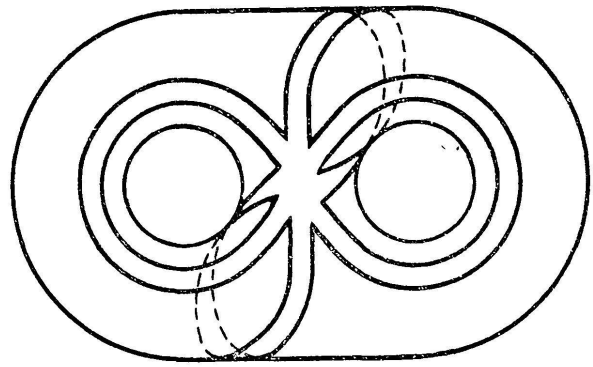


FIG. 21

surface, de même que l'ordre de rotation des rubans autour du disque central. En revenant à  $S_2$ , on obtient sur celle-ci une gerbe canonique (fig. 21), et l'on sait que son bord  $N$  est alors une courbe contractible en un point de  $S_2$ . L'induction étant complète, il résulte que sur  $S_p$  toute gerbe peut être réduite à la forme canonique et, par une déformation sur  $S_p$ , celle-ci peut être appliquée sur une séparatrice canonique  $\Gamma$  de  $S_p$ , dont la classe d'homotopie est déterminée par la valeur de  $k < p$ . La fig. 22 présente le cas

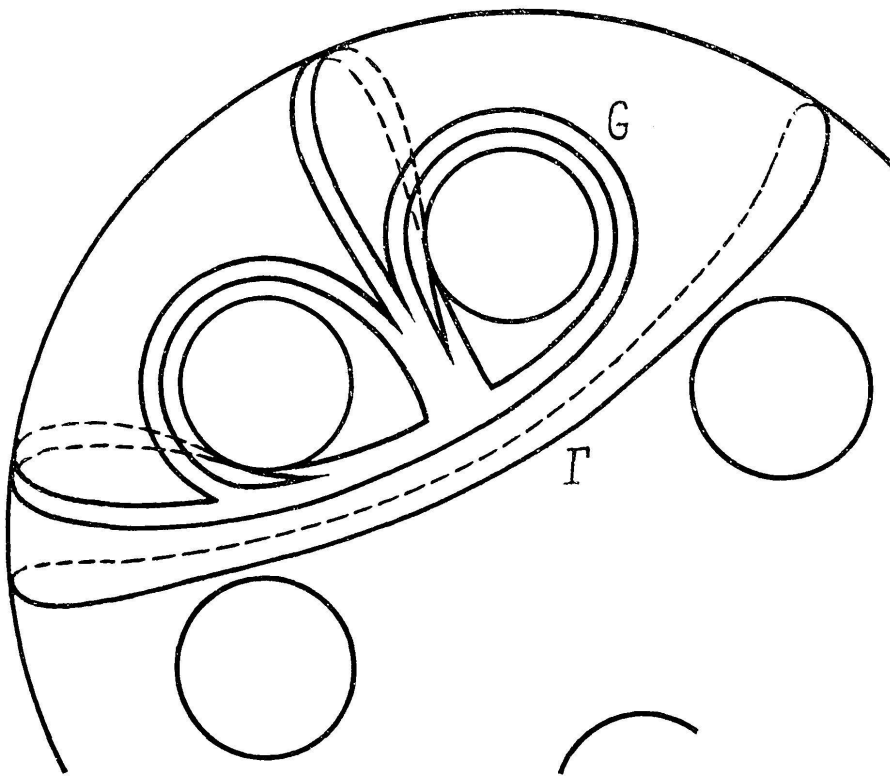


FIG. 22

$p = 5$ ,  $k = 2$ . Remarquons que, par raison de symétrie, on peut se restreindre aux valeurs  $k = 1, 2, \dots \left[ \frac{p}{2} \right]$  afin d'obtenir sur  $S_p$  des séparatrices dont les types (de nœuds) soient distincts. Le procédé utilisé dans notre

démonstration est constructif, car il permet de former effectivement l'automorphisme qui applique  $N \subset S$  sur une coupure canonique, ou séparatrice canonique de  $S$ . Cet automorphisme étant connu, une présentation (intrinsèque) du groupe  $\pi(N) = \pi_1(R^3 - N)$  en résulte [2], si  $N$  est placé sur une surface fermée orientable en position normale dans  $R^3$ , de manière que  $N$  ne sépare pas  $S$ .

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] ZIESCHANG, H. Algorithmen für einfache Kurven auf Flächen. *Mathematica Scandinavica*, 17 (1965), pp. 17-40.
- [2] CALUGAREANU, G. Points de vue sur la théorie des nœuds. *L'Enseignement mathématique*, XVI (1970), pp. 99-110.

( Reçu le 20 janvier 1975 )

G. Calugareanu  
Str. Caragiale 10  
Cluj, Romania