

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 20 (1974)
Heft: 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: ÜBER DIE POTENZGESETZE
Autor: Streb, Walter
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-46905>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 16.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

ÜBER DIE POTENZGESETZE

von Walter STREB

Im folgenden verstehen wir unter einem Ring R eine Struktur mit 2 Verknüpfungen, einer Addition und einer Multiplikation, die folgende Eigenschaften besitzt: R ist bezüglich der Addition eine kommutative Gruppe und bezüglich der Multiplikation ein nicht notwendig assoziatives oder kommutatives Verknüpfungsgebilde. Die Multiplikation ist beidseitig distributiv über der Addition.

In jedem assoziativen und kommutativen Ring R gilt bekanntlich für jedes $n \in \mathbb{N}$ das Potenzgesetz

$$P_n : r^n s^n = (rs)^n \text{ für alle } r, s \in R.$$

Hierbei sei \mathbb{N} die Menge der natürlichen Zahlen und werde wie üblich rekursiv $t^1 := t$, $t^{i+1} := (t^i) t$ für $t \in R$ und $i \in \mathbb{N}$ definiert.

Wir zeigen:

Satz. Besitzt ein Ring R ein Einselement 1 und die Charakteristik 0, d.h.

$$(1) \quad \text{für } n \in \mathbb{N} \text{ und } r \in R \text{ folgt aus } nr = 0 \text{ stets } r = 0,$$

und gilt in R für ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ das Potenzgesetz P_n , so ist R kommutativ und assoziativ.

Beweis. Mit P_n gilt auch

$$(2) \quad (r+1)^n (s+1)^n = ((r+1)(s+1))^n \text{ für alle } r, s \in R.$$

Distributive Berechnung von (2) erbringt

$$1 + \sum_{\substack{i+j \geq 1 \\ 0 \leq i, j \leq n}} S_{i,j}(r, s) = 1 + \sum_{\substack{i+j \geq 1 \\ 0 \leq i, j \leq n}} T_{i,j}(r, s), \text{ also}$$

$$(3) \quad \sum_{\substack{i+j \geq 1 \\ 0 \leq i, j \leq n}} (S_{i,j}(r, s) - T_{i,j}(r, s)) = 0 \text{ für alle } r, s \in R.$$

Hierbei sind $S_{i,j}(r, s)$ und $T_{i,j}(r, s)$ wohlbestimmte Summen von Produkten, in denen r genau i -mal und s genau j -mal erscheint, wobei wegen der nicht vorausgesetzten Assoziativität die Klammersetzung konsequent zu be-

rücksichtigen ist. Für alle $k, l \in N$ erhält man aus (3) durch die formalen Substitutionen $r \rightarrow k r$ und $s \rightarrow l s$ und anschließende distributive Berechnung

$$(4) \quad \sum_{\substack{i+j \geq 1 \\ 0 \leq i, j \leq n}} k^i l^j (S_{i,j}(r, s) - T_{i,j}(r, s)) = \\ = \sum_{\substack{i+j \geq 1 \\ 0 \leq i, j \leq n}} (S_{i,j}(kr, ls) - T_{i,j}(kr, ls)) = 0,$$

also bei geeigneter Linearkombination der Gleichungen (4) und Beachtung von (1)

$$(5) \quad S_{i,j}(r, s) - T_{i,j}(r, s) = 0 \text{ für alle } i \text{ und } j, 0 \leq i, j \leq n, \text{ und } r, s \in R.$$

Speziell gilt

$$(6) \quad 0 = S_{1,1}(r, s) - T_{1,1}(r, s) = m_1 rs - (m_2 rs + m_3 sr) \text{ für alle } r, s \in R \\ \text{mit gewissen } m_i \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq 3.$$

Für $r = s = 1$ folgt aus (6) $m_1 - m_2 = m_3$, also $m_3(rs - sr) = 0$, schließlich mit (1)

$$(7) \quad rs = sr \text{ für alle } r, s \in R.$$

Mit (7) ergibt sich

$$(8) \quad (rr)s = s(rr), r(rs) = r(sr) = (rs)r = (sr)r \text{ für alle } r, s \in R.$$

Speziell gilt weiterhin bei Beachtung von (8)

$$(9) \quad 0 = S_{2,1}(r, s) - T_{2,1}(r, s) = n_1(rr)s - (n_2(rr)s + n_3r(rs)) \text{ für alle } \\ r, s \in R \text{ mit gewissen } n_i \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq 3.$$

Für $r = s = 1$ folgt aus (9) $n_1 - n_2 = n_3$, also $n_3((rr)s - r(rs)) = 0$, schließlich mit (1)

$$(10) \quad (rr)s - r(rs) = 0 \text{ für alle } r, s \in R.$$

Durch die formalen Substitutionen $r \rightarrow u + v$ und $s \rightarrow w$ erhält man aus (10) die Gleichung

$$0 = ((u+v)(u+v))w - (u+v)((u+v)w) = (uu)w - \\ - u(uw) + (vv)w - v(vw) + (uv)w + (vu)w - u(vw) - v(uw) = \\ 2(uv)w - u(vw) - v(uw), \text{ also}$$

$$(11) \quad 2(uv)w - u(vw) - v(uw) = 0 \text{ für alle } u, v, w \in R.$$

Setzt man $u := w$ und $w := u$, so gilt mit (11) auch $0 = 2(wv)u - v(wu) - w(vu) = 2u(vw) - v(uw) - (uv)w$, folglich

$$(12) \quad (uv)w + v(uw) - 2u(vw) = 0 \text{ für alle } u, v, w \in R.$$

Addition der Gleichungen (11) und (12) erbringt $3((uv)w - u(vw)) = 0$, also mit (1) $(uv)w = u(vw)$ für alle $u, v, w \in R$.

Bemerkung. In jedem assoziativen Ring R gelten bekanntlich für alle $m, n \in \mathbb{N}$ die Potenzgesetze

$$(a) \quad r^m r^n = r^{m+n}, (r^m)^n = r^{mn} \text{ für alle } r \in R.$$

Eine dem Satz entsprechende Umkehrung dieser Aussage gilt jedoch nicht wie folgendes

Beispiel zeigt. Mit den Basiselementen $1, a, b$ bilden wir einen Vektorraum über dem Ring \mathbb{Z} der ganzen Zahlen. Durch die Multiplikationsregeln $1 \cdot 1 = 1, 1 \cdot a = a \cdot 1 = a, 1 \cdot b = b \cdot 1 = b, a^2 = b^2 = 0$ und $ab = ba = 1$ erhält man eine kommutative, nichtassoziative Algebra über \mathbb{Z} , in der alle Potenzgesetze (a) gelten.

(Reçu le 25 avril 1974)

Walter Streb

Henri-Dunant-Str.: 65
Fachbereich 6 der Universität
D-43 Essen 16

Vide-leer-empty