

<b>Zeitschrift:</b>	L'Enseignement Mathématique
<b>Herausgeber:</b>	Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
<b>Band:</b>	20 (1974)
<b>Heft:</b>	1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE
<b>Artikel:</b>	SUR LES POINTS SINGULIERS DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES
<b>Autor:</b>	Malgrange, Bernard
<b>Kapitel:</b>	§1. — Comparaison séries formelles — séries convergentes (cf. Malgrange [1])
<b>DOI:</b>	<a href="https://doi.org/10.5169/seals-46900">https://doi.org/10.5169/seals-46900</a>

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 13.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# SUR LES POINTS SINGULIERS DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

par Bernard MALGRANGE

## INTRODUCTION

Le présent article reprend, à quelques modifications près, une série d'exposés faits au séminaire Goulaouic-Schwartz en mars 1972. Le début est consacré à l'étude de l'indice analytique et de l'indice formel d'un opérateur différentiel, et à leur comparaison; les résultats sont très élémentaires, et il est d'autant plus surprenant que, à la connaissance de l'auteur, ils ne figurent pas dans la littérature classique consacrée aux équations différentielles. Signalons à ce propos que le théorème de l'indice analytique a été démontré indépendamment par H. Komatsu [1]. La fin de l'article a davantage un caractère d'exposition: il s'agit, au fond de reprendre les résultats sur les développements asymptotiques de Turritin, tels qu'ils sont exposés dans Wasow [1], en utilisant l'importante simplification apportée par N. Katz [1] dans ce genre de questions. Pour rendre l'exposé plus « original », nous avons préféré travailler avec les germes de fonctions  $C^\infty$ , plutôt qu'avec les développements asymptotiques de fonctions holomorphes dans des angles assez petits, comme le font Turritin et Wasow à la suite d'autres auteurs. La transposition de la méthode suivie ici à ce dernier cas se fait sans difficulté, et nous nous contenterons de l'esquisser à la fin du paragraphe 10.

### § 1. — COMPARAISON SÉRIES FORMELLES — SÉRIES CONVERGENTES (cf. Malgrange [1])

On pose  $\mathcal{O} = \mathbf{C}\{x\}$ , les séries convergentes d'une variable = les germes de fonction holomorphe en  $0 \in \mathbf{C}$ ;  $\hat{\mathcal{O}} = \mathbf{C}[[x]]$  les séries formelles à une variable; enfin  $K$  et  $\hat{K}$  désignent respectivement le corps des fractions de  $\mathcal{O}$  et celui de  $\hat{\mathcal{O}}$  (en particulier,  $K$  est le corps des germes en 0 de fonctions

méromorphes). Pour  $f \in \hat{K}$ , on peut écrire  $f = \sum_{-\infty}^{+\infty} f_p x^p$ ,  $f_p \in \mathbf{C}$ , les  $f_p$  étant nuls pour  $p < p_0$ ; on note  $v(f)$  le plus grand  $p_0$  possédant cette propriété.

Considérons un opérateur différentiel  $D = \sum_0^m a_p \frac{d^p}{dx^p}$ , avec  $a_p \in \mathcal{O}$  ( $0 \leq p \leq m$ ), et  $a_m \neq 0$ . On a d'abord le résultat suivant

*Proposition 1.1.* *L'application  $D: \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}$  est à indice; son indice noté  $\chi(D, \mathcal{O})$  est égal à  $m - v(a_m)$ .*

Rappelons qu'une application linéaire  $u: E \rightarrow F$  ( $E, F$ , espaces vectoriels sur  $\mathbf{C}$ ) est dite « à indice » si son noyau et son conoyau sont de dimension finie; l'indice de  $u$ , qu'on notera  $\chi(u)$  (ou  $\chi(u, E, F)$  ou toute autre notation analogue) est par définition le nombre  $\dim \ker u - \dim \text{coker } u$ .

*Démonstration.* Soit  $\Delta_r \subset \mathbf{C} (r > 0)$  le disque fermé:  $|x| \leq r$ . Pour  $p$  entier  $\geq 0$ , on note  $B^p(\Delta_r)$  l'espace des fonctions sur  $\Delta_r$  à valeurs complexes, de classe  $\mathcal{C}^p$ , et holomorphes sur  $\overset{\circ}{\Delta}_r$ ; c'est un sous-espace fermé de  $\mathcal{C}^p(\Delta_r)$ , ce dernier espace étant muni d'une quelconque des normes équivalentes usuelles.

Choisissons  $r$  assez petit pour que les  $a_p$  soient holomorphes au voisinage de  $\Delta_r$ , et pour que  $a_m$  ne s'annule pas dans  $\Delta_r - \{0\}$ .

*Lemme 1.2.* *L'application  $D: B^m(\Delta_r) \rightarrow B^0(\Delta_r)$  est à indice, et son indice est égal à  $m - v(a_m)$ .*

En effet, écrivons  $D = a_m \frac{d^m}{dx^m} + D'$ ; comme  $D'$  est de degré  $\leq m-1$ , le théorème d'Ascoli montre que l'application  $D': B^m(\Delta_r) \rightarrow B^0(\Delta_r)$  est compacte. D'après les théorèmes connus de perturbation des opérateurs à indice, il suffit donc d'établir le résultat pour  $D$  remplacé par  $a_m \frac{d^m}{dx^m}$  cela se fait immédiatement en factorisant cette dernière application par

$$B^m(\Delta_r) \xrightarrow{\frac{d}{dx}} B^{m-1}(\Delta_r) \xrightarrow{\frac{d}{dx}} \dots \xrightarrow{\frac{d}{dx}} B^0(\Delta_r) \xrightarrow{a_m} B^0(\Delta_r)$$

et en utilisant l'additivité de l'indice par composition.

La proposition se déduit aussitôt du lemme précédent, en utilisant le fait que  $\mathcal{O}$  est la limite inductive des  $B^p(\Delta_r)$ , pour  $r \rightarrow 0$ .

Passons maintenant au cas des séries formelles.

*Proposition 1.3.* L'application  $D : \hat{\mathcal{O}} \rightarrow \hat{\mathcal{O}}$  est à indice, et l'on a

$$\chi(D, \hat{\mathcal{O}}) = \sup [p - v(a_p)].$$

Posons en effet  $n = \sup [p - v(a_p)]$ ; on a  $v(a_p) \geq p - n$ , avec égalité pour certaines valeurs de  $p$ , disons  $p \in P$ : pour tout  $p$ , on a  $a_p = x^{p-n} b_p$ , avec  $b_p \in \mathcal{O}$ , et  $b_p(0) \neq 0$  pour  $p \in P$ .

Soit  $k$  un entier  $\geq n$ ; on a

$$a_p \frac{d^p}{dx^p} x^k = k(k-1)\dots(k-p+1) b_p(0) x^{k-n} + (\text{termes d'ordre } > k-n)$$

$$\text{d'où } D x^k = \sum_{p \in P} k(k-1)\dots(k-p+1) b_p(0) x^{k-n} + (\text{termes d'ordre } > k-n);$$

pour  $k$  assez grand, disons  $k \geq k_0$  le coefficient de  $x^{k-n}$  dans l'expression précédente est  $\neq 0$ , puisque c'est un polynôme en  $k$  dont le terme dominant  $b_q(0) k^q$  ( $q = \sup P$ ) est non nul.

On déduit de là, par un calcul de récurrence sur les coefficients que pour  $k \geq k_0$  et  $g \subset \hat{\mathcal{O}}$  donné, avec  $v(g) \geq k - n$ , il existe un unique  $f \in \hat{\mathcal{O}}$  vérifiant  $v(f) \geq k$ ,  $Df = g$ ; autrement dit, en désignant par  $\hat{\mathfrak{m}}$  l'idéal maximal de  $\hat{\mathcal{O}}$ , on a un isomorphisme

$$D : \hat{\mathfrak{m}}^k \xrightarrow{\sim} \hat{\mathfrak{m}}^{k-n} \quad (k \geq k_0).$$

La proposition résulte immédiatement de là, par exemple par un argument de suite exacte.

Considérons maintenant la suite exacte  $0 \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow \hat{\mathcal{O}} \rightarrow \hat{\mathcal{O}}/\mathcal{O} \rightarrow 0$ . En appliquant  $D$  à chacun des 3 facteurs, on trouve une suite exacte de complexes; d'où une suite exacte de cohomologie.

$$0 \rightarrow \ker(D, \mathcal{O}) \rightarrow \ker(D, \hat{\mathcal{O}}) \rightarrow \ker D, \hat{\mathcal{O}}/\mathcal{O} \rightarrow \operatorname{coker}(D, \mathcal{O}) \rightarrow \\ \operatorname{coker}(D, \hat{\mathcal{O}}) \rightarrow \operatorname{coker}(D, \hat{\mathcal{O}}/\mathcal{O}) \rightarrow 0$$

Le troisième et le sixième terme de cette suite exacte donnent donc les obstructions pour que les flèches  $\ker(D, \mathcal{O}) \rightarrow \ker(D, \hat{\mathcal{O}})$  et  $\operatorname{coker}(D, \mathcal{O}) \rightarrow \operatorname{coker}(D, \hat{\mathcal{O}})$  soient des isomorphismes. Le théorème de comparaison est alors le suivant

*Théorème 1.4.* On a 1)  $\operatorname{coker}(D, \hat{\mathcal{O}}/\mathcal{O}) = 0$ ,  
 2)  $\dim \ker(D, \hat{\mathcal{O}}/\mathcal{O}) = \sup [p - v(a_p)] - m + v(a_m)$ .

L'assertion 1) signifie que, pour tout  $f \in \hat{\mathcal{O}}$ , il existe  $g \in \hat{\mathcal{O}}$  et  $h \in \mathcal{O}$  avec  $f = Dg + h$ ; or, la démonstration de la proposition 1.3 montre qu'il suffit de prendre un  $h$  tel qu'on ait  $v(f - h) \geq k_0 - n$ ; par exemple il suffit de prendre pour  $h$  la somme des termes de degré  $< k_0 - n$  de  $f$ .

L'assertion 2) résulte alors immédiatement des propositions 1.1 et 1.3; d'où le théorème.

Pour qu'on ait  $\ker(D, \hat{\mathcal{O}}/\mathcal{O}) = 0$ , et par conséquent, pour que les flèches  $\ker(D, \mathcal{O}) \rightarrow \ker(D, \hat{\mathcal{O}})$  et  $\text{coker}(D, \mathcal{O}) \rightarrow \text{coker}(D, \hat{\mathcal{O}})$  soient toutes deux bijectives, il faut et il suffit qu'on ait  $m - v(a_m) = \sup [p - v(a_p)]$ , autrement dit qu'on ait, pour tout  $p$ ,  $v(a_p) \geq v(a_m) + p - m$ . Or c'est précisément la définition classique des points singuliers réguliers. Cela nous conduit à la définition suivante

*Définition 1.5.* On appelle « irrégularité de  $D$  (en 0) » le nombre  $i(D) = \sup [p - v(a_p)] - [m - v(a_m)]$ .

Un exemple classique (Euler) de point singulier irrégulier est le suivant: on prend  $Df = x^2 \frac{df}{dx} - f$ ; posant  $f_0 = \sum_{n \geq 0} n! x^{n+1}$ , on a  $Df = x$ ; on a ici  $i(D) = 1$ , donc la classe de  $f_0$  modulo  $\mathcal{O}$  est une base de  $\ker(D, \hat{\mathcal{O}}/\mathcal{O})$ .

*Remarque 1.6.* La proposition 1.1. montre en particulier qu'on a  $\dim \ker(D, \mathcal{O}) \geq m - v(a_m)$ , ce qui est un théorème classique de Perron.

*Remarque 1.7.* Soit  $\Omega$  un ouvert connexe de  $\mathbf{C}$ , et soit  $D = \sum_0^m a_p \frac{d^p}{dx^p}$  un opérateur différentiel à coefficients dans  $\mathcal{H}(\Omega)$ , l'espace des fonctions holomorphes dans  $\Omega$ . Supposons qu'on ait  $b^1 = \dim H^1(\Omega, \mathbf{C}) < +\infty$  et que le nombre  $v(a_m, \Omega)$  des zéros de  $a_m$  dans  $\Omega$  (compté chacun avec son ordre) soit fini. On a alors le résultat suivant: l'application  $D : \mathcal{H}(\Omega) \rightarrow \mathcal{H}(\Omega)$  est à indice, et l'on a  $\chi(D, \mathcal{H}(\Omega)) = m(1 - b^1) - v(a_m, \Omega)$ .

Cela peut se voir par exemple d'une manière analogue à la proposition 1.1 en approchant  $\Omega$  par une suite convenable de compacts  $K_i$  à bord régulier et en étudiant l'application  $D : B^m(K_i) \rightarrow B^0(K_i)$ .

On peut aussi opérer ainsi: soit  $Z$  l'ensemble des zéros de  $a_m$ , et posons  $\Omega^* = \Omega - Z$ ; sur  $\Omega^*$ , la suite de faisceaux

$$0 \rightarrow \ker(D, \mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{H} \xrightarrow{D} \mathcal{H} \rightarrow 0$$

est exacte et  $\ker(D, \mathcal{H})$  est localement isomorphe à  $\mathbf{C}^m$  (théorème d'existence et d'unicité usuel); par suite l'application  $D : \mathcal{H}(\Omega^*) \rightarrow \mathcal{H}(\Omega^*)$  a pour indice  $m(1 - b_*^1)$ ,  $b_*^1 = \dim H^1(\Omega^*, \mathbf{C})$ .

D'autre part, pour chaque  $a \in Z$ , soit  $\Delta_a$  un disque ouvert centré en  $a$ , avec  $\Delta_a \subset \Omega$ ,  $\Delta_a \cap \Delta_b = \emptyset$  si  $a \neq b$ . Comme  $H^1(\Omega, \mathcal{H}) = 0$ , on a

$$\mathcal{H}(\Omega^*) / \mathcal{H}(\Omega) \simeq \bigoplus_{a \in Z} \mathcal{H}(\Delta_a^*) / \mathcal{H}(\Delta_a), \text{ avec } \Delta_a^* = \Delta_a - \{a\}.$$

On a  $\chi(D, \mathcal{H}(\Delta_a^*)) = 0$  par le raisonnement précédent, et  $\chi(D, \mathcal{H}(\Delta_a)) = m - v(a_m, a)$  (par passage à la limite projective, à partir de 1.2.) On conclut alors en utilisant la suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{H}(\Omega) \rightarrow \mathcal{H}(\Omega^*) \rightarrow \mathcal{H}(\Omega^*) / \mathcal{H}(\Omega) \rightarrow 0.$$

## § 2. — AUTRES THÉORÈMES DE COMPARAISON

Nous reprenons les hypothèses de la proposition 1.1.

*Théorème 2.1.*

- a) L'application  $D : K \rightarrow K$  est à indice et l'on a  $\chi(D, K) = -i(D)$ .
- b) L'application  $D : \hat{K} \rightarrow \hat{K}$  est à indice, et l'on a  $\chi(D, \hat{K}) = 0$ .
- c) On a  $\text{coker}(D, \hat{K}/K) = 0$  et  $\dim \ker(D, \hat{K}/K) = i(D)$ .

L'assertion c) résulte de 1.4 et de l'isomorphisme naturel  $\hat{\mathcal{O}}/\mathcal{O} \xrightarrow{\sim} \hat{K}/K$ . Les assertions a) et b) vont résulter du lemme suivant:

*Lemme 2.2.* L'application  $D : K/\mathcal{O} \rightarrow K/\mathcal{O}$  a pour indice  $-\sup[p - v(a_p)]$ .

Désignons en effet par  $K_{-p}$  l'ensemble des éléments  $f$  de  $K$ , avec  $v(f) \geq -p$ ; un calcul analogue à celui de la proposition 1.3 fait avec les puissances négatives de  $x$  montre qu'on a, avec  $n = \sup[p - v(a_p)]$ :  $D K_{-p} \subset K_{-p-n}$ , et que, pour  $p$  assez grand, l'application  $D : K/K_{-p} \rightarrow K/K_{-p-n}$  est un isomorphisme. Le lemme en résulte immédiatement. L'assertion a) résulte alors de 1.1 et 2.2 en utilisant la suite exacte  $0 \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow K \rightarrow K/\mathcal{O} \rightarrow 0$ ; l'assertion b) résulte de manière analogue de 1.3 et 2.2, et de l'isomorphisme  $K/\mathcal{O} \xrightarrow{\sim} \hat{K}/\hat{\mathcal{O}}$ .

Soit  $S_n$  l'espace des fonctions holomorphes dans la couronne  $0 < |x| < r$ , et  $S = \bigcup_{r>0} S_r$ . On a le résultat suivant (cf. Deligne [1], prop. II.6.20).