

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 20 (1974)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LES POINTS SINGULIERS DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES
Autor: Malgrange, Bernard
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-46900>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 16.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

SUR LES POINTS SINGULIERS DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

par Bernard MALGRANGE

INTRODUCTION

Le présent article reprend, à quelques modifications près, une série d'exposés faits au séminaire Goulaouic-Schwartz en mars 1972. Le début est consacré à l'étude de l'indice analytique et de l'indice formel d'un opérateur différentiel, et à leur comparaison; les résultats sont très élémentaires, et il est d'autant plus surprenant que, à la connaissance de l'auteur, ils ne figurent pas dans la littérature classique consacrée aux équations différentielles. Signalons à ce propos que le théorème de l'indice analytique a été démontré indépendamment par H. Komatsu [1]. La fin de l'article a davantage un caractère d'exposition: il s'agit, au fond de reprendre les résultats sur les développements asymptotiques de Turritin, tels qu'ils sont exposés dans Wasow [1], en utilisant l'importante simplification apportée par N. Katz [1] dans ce genre de questions. Pour rendre l'exposé plus « original », nous avons préféré travailler avec les germes de fonctions C^∞ , plutôt qu'avec les développements asymptotiques de fonctions holomorphes dans des angles assez petits, comme le font Turritin et Wasow à la suite d'autres auteurs. La transposition de la méthode suivie ici à ce dernier cas se fait sans difficulté, et nous nous contenterons de l'esquisser à la fin du paragraphe 10.

§ 1. — COMPARAISON SÉRIES FORMELLES — SÉRIES CONVERGENTES (cf. Malgrange [1])

On pose $\mathcal{O} = \mathbf{C}\{x\}$, les séries convergentes d'une variable = les germes de fonction holomorphe en $0 \in \mathbf{C}$; $\hat{\mathcal{O}} = \mathbf{C}[[x]]$ les séries formelles à une variable; enfin K et \hat{K} désignent respectivement le corps des fractions de \mathcal{O} et celui de $\hat{\mathcal{O}}$ (en particulier, K est le corps des germes en 0 de fonctions

méromorphes). Pour $f \in \hat{K}$, on peut écrire $f = \sum_{-\infty}^{+\infty} f_p x^p$, $f_p \in \mathbf{C}$, les f_p étant nuls pour $p < p_0$; on note $v(f)$ le plus grand p_0 possédant cette propriété.

Considérons un opérateur différentiel $D = \sum_0^m a_p \frac{d^p}{dx^p}$, avec $a_p \in \mathcal{O}$ ($0 \leq p \leq m$), et $a_m \neq 0$. On a d'abord le résultat suivant

Proposition 1.1. *L'application $D: \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}$ est à indice; son indice noté $\chi(D, \mathcal{O})$ est égal à $m - v(a_m)$.*

Rappelons qu'une application linéaire $u: E \rightarrow F$ (E, F , espaces vectoriels sur \mathbf{C}) est dite « à indice » si son noyau et son conoyau sont de dimension finie; l'indice de u , qu'on notera $\chi(u)$ (ou $\chi(u, E, F)$ ou toute autre notation analogue) est par définition le nombre $\dim \ker u - \dim \text{coker } u$.

Démonstration. Soit $\Delta_r \subset \mathbf{C} (r > 0)$ le disque fermé: $|x| \leq r$. Pour p entier ≥ 0 , on note $B^p(\Delta_r)$ l'espace des fonctions sur Δ_r à valeurs complexes, de classe \mathcal{C}^p , et holomorphes sur $\overset{\circ}{\Delta}_r$; c'est un sous-espace fermé de $\mathcal{C}^p(\Delta_r)$, ce dernier espace étant muni d'une quelconque des normes équivalentes usuelles.

Choisissons r assez petit pour que les a_p soient holomorphes au voisinage de Δ_r , et pour que a_m ne s'annule pas dans $\Delta_r - \{0\}$.

Lemme 1.2. *L'application $D: B^m(\Delta_r) \rightarrow B^0(\Delta_r)$ est à indice, et son indice est égal à $m - v(a_m)$.*

En effet, écrivons $D = a_m \frac{d^m}{dx^m} + D'$; comme D' est de degré $\leq m-1$, le théorème d'Ascoli montre que l'application $D': B^m(\Delta_r) \rightarrow B^0(\Delta_r)$ est compacte. D'après les théorèmes connus de perturbation des opérateurs à indice, il suffit donc d'établir le résultat pour D remplacé par $a_m \frac{d^m}{dx^m}$ cela se fait immédiatement en factorisant cette dernière application par

$$B^m(\Delta_r) \xrightarrow{\frac{d}{dx}} B^{m-1}(\Delta_r) \xrightarrow{\frac{d}{dx}} \dots \xrightarrow{\frac{d}{dx}} B^0(\Delta_r) \xrightarrow{a_m} B^0(\Delta_r)$$

et en utilisant l'additivité de l'indice par composition.

La proposition se déduit aussitôt du lemme précédent, en utilisant le fait que \mathcal{O} est la limite inductive des $B^p(\Delta_r)$, pour $r \rightarrow 0$.

Passons maintenant au cas des séries formelles.

Proposition 1.3. L'application $D : \hat{\mathcal{O}} \rightarrow \hat{\mathcal{O}}$ est à indice, et l'on a

$$\chi(D, \hat{\mathcal{O}}) = \sup [p - v(a_p)].$$

Posons en effet $n = \sup [p - v(a_p)]$; on a $v(a_p) \geq p - n$, avec égalité pour certaines valeurs de p , disons $p \in P$: pour tout p , on a $a_p = x^{p-n} b_p$, avec $b_p \in \mathcal{O}$, et $b_p(0) \neq 0$ pour $p \in P$.

Soit k un entier $\geq n$; on a

$$a_p \frac{d^p}{dx^p} x^k = k(k-1)\dots(k-p+1) b_p(0) x^{k-n} + (\text{termes d'ordre } > k-n)$$

$$\text{d'où } D x^k = \sum_{p \in P} k(k-1)\dots(k-p+1) b_p(0) x^{k-n} + (\text{termes d'ordre } > k-n);$$

pour k assez grand, disons $k \geq k_0$ le coefficient de x^{k-n} dans l'expression précédente est $\neq 0$, puisque c'est un polynôme en k dont le terme dominant $b_q(0) k^q$ ($q = \sup P$) est non nul.

On déduit de là, par un calcul de récurrence sur les coefficients que pour $k \geq k_0$ et $g \subset \hat{\mathcal{O}}$ donné, avec $v(g) \geq k - n$, il existe un unique $f \in \hat{\mathcal{O}}$ vérifiant $v(f) \geq k$, $Df = g$; autrement dit, en désignant par $\hat{\mathfrak{m}}$ l'idéal maximal de $\hat{\mathcal{O}}$, on a un isomorphisme

$$D : \hat{\mathfrak{m}}^k \xrightarrow{\sim} \hat{\mathfrak{m}}^{k-n} \quad (k \geq k_0).$$

La proposition résulte immédiatement de là, par exemple par un argument de suite exacte.

Considérons maintenant la suite exacte $0 \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow \hat{\mathcal{O}} \rightarrow \hat{\mathcal{O}}/\mathcal{O} \rightarrow 0$. En appliquant D à chacun des 3 facteurs, on trouve une suite exacte de complexes; d'où une suite exacte de cohomologie.

$$0 \rightarrow \ker(D, \mathcal{O}) \rightarrow \ker(D, \hat{\mathcal{O}}) \rightarrow \ker D, \hat{\mathcal{O}}/\mathcal{O} \rightarrow \operatorname{coker}(D, \mathcal{O}) \rightarrow \\ \operatorname{coker}(D, \hat{\mathcal{O}}) \rightarrow \operatorname{coker}(D, \hat{\mathcal{O}}/\mathcal{O}) \rightarrow 0$$

Le troisième et le sixième terme de cette suite exacte donnent donc les obstructions pour que les flèches $\ker(D, \mathcal{O}) \rightarrow \ker(D, \hat{\mathcal{O}})$ et $\operatorname{coker}(D, \mathcal{O}) \rightarrow \operatorname{coker}(D, \hat{\mathcal{O}})$ soient des isomorphismes. Le théorème de comparaison est alors le suivant

Théorème 1.4. On a 1) $\operatorname{coker}(D, \hat{\mathcal{O}}/\mathcal{O}) = 0$,
 2) $\dim \ker(D, \hat{\mathcal{O}}/\mathcal{O}) = \sup [p - v(a_p)] - m + v(a_m)$.

L'assertion 1) signifie que, pour tout $f \in \hat{\mathcal{O}}$, il existe $g \in \hat{\mathcal{O}}$ et $h \in \mathcal{O}$ avec $f = Dg + h$; or, la démonstration de la proposition 1.3 montre qu'il suffit de prendre un h tel qu'on ait $v(f - h) \geq k_0 - n$; par exemple il suffit de prendre pour h la somme des termes de degré $< k_0 - n$ de f .

L'assertion 2) résulte alors immédiatement des propositions 1.1 et 1.3; d'où le théorème.

Pour qu'on ait $\ker(D, \hat{\mathcal{O}}/\mathcal{O}) = 0$, et par conséquent, pour que les flèches $\ker(D, \mathcal{O}) \rightarrow \ker(D, \hat{\mathcal{O}})$ et $\text{coker}(D, \mathcal{O}) \rightarrow \text{coker}(D, \hat{\mathcal{O}})$ soient toutes deux bijectives, il faut et il suffit qu'on ait $m - v(a_m) = \sup [p - v(a_p)]$, autrement dit qu'on ait, pour tout p , $v(a_p) \geq v(a_m) + p - m$. Or c'est précisément la définition classique des points singuliers réguliers. Cela nous conduit à la définition suivante

Définition 1.5. On appelle « irrégularité de D (en 0) » le nombre $i(D) = \sup [p - v(a_p)] - [m - v(a_m)]$.

Un exemple classique (Euler) de point singulier irrégulier est le suivant: on prend $Df = x^2 \frac{df}{dx} - f$; posant $f_0 = \sum_{n \geq 0} n! x^{n+1}$, on a $Df = x$; on a ici $i(D) = 1$, donc la classe de f_0 modulo \mathcal{O} est une base de $\ker(D, \hat{\mathcal{O}}/\mathcal{O})$.

Remarque 1.6. La proposition 1.1. montre en particulier qu'on a $\dim \ker(D, \mathcal{O}) \geq m - v(a_m)$, ce qui est un théorème classique de Perron.

Remarque 1.7. Soit Ω un ouvert connexe de \mathbf{C} , et soit $D = \sum_0^m a_p \frac{d^p}{dx^p}$ un opérateur différentiel à coefficients dans $\mathcal{H}(\Omega)$, l'espace des fonctions holomorphes dans Ω . Supposons qu'on ait $b^1 = \dim H^1(\Omega, \mathbf{C}) < +\infty$ et que le nombre $v(a_m, \Omega)$ des zéros de a_m dans Ω (compté chacun avec son ordre) soit fini. On a alors le résultat suivant: l'application $D : \mathcal{H}(\Omega) \rightarrow \mathcal{H}(\Omega)$ est à indice, et l'on a $\chi(D, \mathcal{H}(\Omega)) = m(1 - b^1) - v(a_m, \Omega)$.

Cela peut se voir par exemple d'une manière analogue à la proposition 1.1 en approchant Ω par une suite convenable de compacts K_i à bord régulier et en étudiant l'application $D : B^m(K_i) \rightarrow B^0(K_i)$.

On peut aussi opérer ainsi: soit Z l'ensemble des zéros de a_m , et posons $\Omega^* = \Omega - Z$; sur Ω^* , la suite de faisceaux

$$0 \rightarrow \ker(D, \mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{H} \xrightarrow{D} \mathcal{H} \rightarrow 0$$

est exacte et $\ker(D, \mathcal{H})$ est localement isomorphe à \mathbf{C}^m (théorème d'existence et d'unicité usuel); par suite l'application $D : \mathcal{H}(\Omega^*) \rightarrow \mathcal{H}(\Omega^*)$ a pour indice $m(1 - b_*^1)$, $b_*^1 = \dim H^1(\Omega^*, \mathbf{C})$.

D'autre part, pour chaque $a \in Z$, soit Δ_a un disque ouvert centré en a , avec $\Delta_a \subset \Omega$, $\Delta_a \cap \Delta_b = \emptyset$ si $a \neq b$. Comme $H^1(\Omega, \mathcal{H}) = 0$, on a

$$\mathcal{H}(\Omega^*) / \mathcal{H}(\Omega) \simeq \bigoplus_{a \in Z} \mathcal{H}(\Delta_a^*) / \mathcal{H}(\Delta_a), \text{ avec } \Delta_a^* = \Delta_a - \{a\}.$$

On a $\chi(D, \mathcal{H}(\Delta_a^*)) = 0$ par le raisonnement précédent, et $\chi(D, \mathcal{H}(\Delta_a)) = m - v(a_m, a)$ (par passage à la limite projective, à partir de 1.2.) On conclut alors en utilisant la suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{H}(\Omega) \rightarrow \mathcal{H}(\Omega^*) \rightarrow \mathcal{H}(\Omega^*) / \mathcal{H}(\Omega) \rightarrow 0.$$

§ 2. — AUTRES THÉORÈMES DE COMPARAISON

Nous reprenons les hypothèses de la proposition 1.1.

Théorème 2.1.

- a) L'application $D : K \rightarrow K$ est à indice et l'on a $\chi(D, K) = -i(D)$.
- b) L'application $D : \hat{K} \rightarrow \hat{K}$ est à indice, et l'on a $\chi(D, \hat{K}) = 0$.
- c) On a $\text{coker}(D, \hat{K}/K) = 0$ et $\dim \ker(D, \hat{K}/K) = i(D)$.

L'assertion c) résulte de 1.4 et de l'isomorphisme naturel $\hat{\mathcal{O}}/\mathcal{O} \xrightarrow{\sim} \hat{K}/K$. Les assertions a) et b) vont résulter du lemme suivant:

Lemme 2.2. L'application $D : K/\mathcal{O} \rightarrow K/\mathcal{O}$ a pour indice $-\sup[p - v(a_p)]$.

Désignons en effet par K_{-p} l'ensemble des éléments f de K , avec $v(f) \geq -p$; un calcul analogue à celui de la proposition 1.3 fait avec les puissances négatives de x montre qu'on a, avec $n = \sup[p - v(a_p)]$: $D K_{-p} \subset K_{-p-n}$, et que, pour p assez grand, l'application $D : K/K_{-p} \rightarrow K/K_{-p-n}$ est un isomorphisme. Le lemme en résulte immédiatement. L'assertion a) résulte alors de 1.1 et 2.2 en utilisant la suite exacte $0 \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow K \rightarrow K/\mathcal{O} \rightarrow 0$; l'assertion b) résulte de manière analogue de 1.3 et 2.2, et de l'isomorphisme $K/\mathcal{O} \xrightarrow{\sim} \hat{K}/\hat{\mathcal{O}}$.

Soit S_n l'espace des fonctions holomorphes dans la couronne $0 < |x| < r$, et $S = \bigcup_{r>0} S_r$. On a le résultat suivant (cf. Deligne [1], prop. II.6.20).

Théorème 2.3. *Même énoncé que 2.1 avec \hat{K} remplacé par S .*

L'assertion a) coïncide avec celle de 2.1. D'autre part, il résulte de la remarque 1.7 que r assez petit, on a $\chi(D, S_r) = 0$; le fait qu'on ait $\chi(D, S) = 0$ s'en déduit par passage à la limite inductive.

Pour démontrer l'assertion $\text{coker}(D, S/K) = 0$, il suffit de démontrer ceci: désignons par K_r le sous-espace de S_r formé des fonctions méromorphes en 0; alors, pour r assez petit, on a $S_r = D S_r + K_r$; or cela résulte du fait que K_r est dense dans S_r (muni de sa topologie usuelle de Fréchet) et de ce que $D S_r$ est de codimension finie dans S_r , donc fermé d'après un lemme classique.

L'assertion « $\dim \ker(D, S/K) = i(D)$ » se démontre alors en utilisant les précédents et la suite exacte de cohomologie, comme l'assertion 1.4.2; d'où le théorème.

Par exemple, si $D f = x^2 \frac{df}{dx} - f$, une base de $\ker(D, S/K)$ est $f_1 = e^{-1/x}$; comme f_1 provient d'un élément de $\ker(D, S)$ l'application $\text{coker}(D, K) \rightarrow \text{coker}(D, S)$ est ici bijective.

§ 3. — EXTENSION AUX SYSTÈMES

Il sera commode ici de prendre les systèmes d'abord sous la forme $F \rightarrow x \frac{dF}{dx} - M F$, $F \in K^m$ (ou \hat{K}^m , ou S^m), M matrice carrée à coefficients dans K [on écrira: $M \in \text{End}(K^m)$].

Soit $A \in \text{Gl}(m, K)$, i.e. $A \in \text{End}(K^m)$, A inversible; la transformation $F = A G$ transforme D en D' avec $D' G = x \frac{dG}{dx} - N G$, $N = A^{-1} M A - x A^{-1} \frac{dA}{dx}$. Rappelons le résultat suivant (voir Deligne [1] lemme II.1.3).

Théorème 3.1. *Il existe $A \in \text{Gl}(m, K)$ tel que N ait la forme suivante*

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 1 \\ \lambda_0 & \cdot & \cdot & \cdot & \lambda_{m-2} & \lambda_{m-1} \end{bmatrix}$$

Soit alors Δ l'opérateur différentiel défini par

$$\Delta f = \partial^m f - \lambda_{m-1} \partial^{m-1} f \dots - \lambda_0 f, \text{ avec } \partial = x \frac{d}{dx};$$

il est immédiat que D' est « équivalent » à Δ et, de façon plus précise, qu'on a le résultat suivant:

Considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{\Delta} & K \\ u \downarrow & & \downarrow v \\ K^m & \xrightarrow{D'} & K^n \end{array}$$

avec $u(f) = (f_0, \dots, f_{m-1})$, $v(g) = (0, \dots, 0, g)$; alors ce diagramme induit un isomorphisme entre le noyau de Δ et le noyau de D' d'une part, le conoyau de Δ et le conoyau de D' d'autre part; le même résultat est encore vrai avec K remplacé par \hat{K} , S , etc.

Définissons alors l'irrégularité de Δ par la formule $i(\Delta) = i(x^k \Delta)$, k un entier tel que $x^k \Delta$ soit à coefficients holomorphes. Cela ne dépend visiblement pas de k , et on laisse le lecteur vérifier la formule suivante

$$(3.2) \quad i(\Delta) = \sup (0, \sup -v(\lambda_p))$$

Définissons ensuite l'irrégularité de D par $i(D) = i(\Delta)$. Les théorèmes 2.1 et 2.3 entraînent immédiatement le résultat suivant

Théorème 3.3.

- a) L'application $D : K^m \rightarrow K^m$ est à indice et l'on a $\chi(D, K) = -i(D)$.
- b) L'application $D : \hat{K}^m \rightarrow \hat{K}^m$ est à indice et l'on a $\chi(D, \hat{K}) = 0$.
- c) On a $\text{coker}(D, \hat{K}^m / K^m) = 0$ et $\dim \ker(D, \hat{K}^m / K^m) = i(D)$.
- d) Mêmes énoncés avec \hat{K} remplacé par S .

Ce théorème montre en particulier, que $i(D)$ ne dépend que de D , et non pas du choix de A dans 3.1; nous donnerons une démonstration algébrique de ce résultat dans le prochain exposé.

Rappelons maintenant que, suivant une définition classique, l'origine est un point singulier régulier de D s'il existe un $A \in \text{Gl}(m, K)$ tel que $N = A^{-1} M A - x A^{-1} \frac{dA}{dx}$ n'ait pas de pôle. Cela est classiquement

équivalent à la propriété suivante: n'importe quelle détermination d'une (ou de toute) matrice fondamentale de P est à croissance polynomiale en $\frac{1}{x}$ au voisinage de 0; ceci équivaut encore au fait qu'on a $P = Q \exp(C \log x)$, avec Q à coefficients méromorphes, i.e. $Q \in \mathrm{Gl}(m, K)$.

Proposition 3.4. *Pour que 0 soit un point singulier régulier de D il faut et il suffit qu'on ait $i(D) = 0$.*

Supposons qu'on ait $i(D) = 0$, et soit A comme au théorème 3.1; alors $i(A) = 0$, donc, d'après la formule 3.2, les λ_p n'ont pas de pôle; donc N n'a pas de pôle.

Pour démontrer la réciproque, nous utiliserons le lemme suivant.

Lemme 3.5. *Supposons que M n'ait pas de pôle; alors l'application $D : \hat{\mathcal{O}}^m \rightarrow \hat{\mathcal{O}}^m$ est d'indice nul.*

La démonstration est analogue à celle de la proposition 1.3. Soit F_k un vecteur de \mathbf{C}^m ; on a $D(F_k x^k) = [kI - M(0)] x^k + (\text{termes de degré } > k)$; pour k assez grand, disons $k \geq k_0$, $kI - M(0)$ est inversible; de là, il résulte que l'application $D : \mathfrak{m}^k(\mathcal{O}^m) \rightarrow \mathfrak{m}^k(\mathcal{O}^m)$ est bijective pour $k \geq k_0$. Le lemme en résulte immédiatement.

Sous la même hypothèse que M n'ait pas de pôle, la proposition 3.6, ci-dessous, montre que $D : \mathcal{O}^m \rightarrow \mathcal{O}^m$ est encore d'indice nul; donc, l'indice de $D : \hat{\mathcal{O}}^m / \mathcal{O}^m \rightarrow \hat{\mathcal{O}}^m / \mathcal{O}^m$ est nul; en vertu de l'isomorphisme $\hat{\mathcal{O}} / \mathcal{O} \xrightarrow{\sim} \hat{K} / K$, le théorème 3.3 c) nous montre alors qu'on a $i(D) = 0$; d'où la proposition.

Par la suite, il sera nécessaire aussi d'envisager des systèmes sous la forme un peu plus générale suivante: H étant une matrice diagonale à coefficients entiers (h_1, \dots, h_m) on pose $DF = x^H \frac{dF}{dx} - MF$, avec $M \in \mathrm{End}(K^m)$. Par définition, on prendra $i(D) = i(x^{I-H}D)$, moyennant quoi le théorème 3.3 est encore vrai pour D .

On a aussi la proposition suivante.

Proposition 3.6. *Si M est sans pôle, et les h_i positifs, alors $D : \mathcal{O}^m \rightarrow \mathcal{O}^m$ a pour indice $(h_1 + \dots + h_m - m)$ et $D : \hat{\mathcal{O}}^m \rightarrow \hat{\mathcal{O}}^m$ a pour indice $i(D) + (h_1 + \dots + h_m - m)$.*

La première assertion se démontre comme la proposition 1.1. La seconde résulte de là, du fait que le théorème 3.3 s'applique à D , et de l'isomor-

phisme $\hat{\mathcal{O}}/\mathcal{O} \rightarrow \hat{K}/K$. A noter aussi que, d'après la première assertion, on a $\dim \ker(D, \mathcal{O}^m) \geq h_1 + \dots + h_m - m$ (théorème de Perron pour les systèmes).

§ 4. — REMARQUES DIVERSES

a) Equations dépendant d'un paramètre

La théorie des équations différentielles dépendant d'un paramètre présente de nombreuses difficultés. Nous donnerons seulement ici un énoncé simple, qui « relativise » la proposition 1.1, et cela sans chercher les hypothèses minimum nécessaires. Soit Z une variété analytique complexe connexe, et soit D l'opérateur différentiel « dépendant du paramètre $z \in Z$ »:

$D = \sum_0^m a_p \frac{d^p}{dx^p}$, $a_p \in \mathcal{H}(\Delta \times Z)$, Δ le disque unité ouvert; supposons $a_m \neq 0$; soit $V \subset \Delta \times Z$ l'ensemble des zéros de a_m , et supposons que la projection $V \rightarrow Z$ induite par la projection naturelle $\pi: \Delta \times Z \rightarrow Z$ soit propre. Soit \mathcal{K} le complexe $0 \rightarrow \mathcal{H}_{\Delta \times Z} \rightarrow \mathcal{H}_{\Delta \times Z} \rightarrow 0$, avec $\mathcal{H}_{\Delta \times Z}$ désignant le faisceau des fonctions holomorphes sur $\Delta \times Z$.

Proposition 4.1. *Le complexe $\pi_* \mathcal{K}$ est à cohomologie \mathcal{H}_Z -cohérente.*

Autrement dit, les faisceaux associés aux préfaisceaux $U \rightarrow \ker(D, \mathcal{H}(\Delta \times U))$ et $U \rightarrow \text{coker}(D, \mathcal{H}(\Delta \times U))$, U ouvert de Z , sont \mathcal{H}_Z -cohérents. Esquissons la démonstration: on peut, en restreignant Z , supposer que V est contenu dans $\Delta_r \times Z$, avec $0 < r < 1$, Δ_r le disque fermé de rayon r ; prenons r' vérifiant $r < r' < 1$. On démontre facilement, à l'aide du théorème d'existence, d'unicité, et de dépendance d'un paramètre pour les équations différentielles que le préfaisceau associé au faisceau $U \rightarrow (\ker D, \mathcal{H}(\Delta \times U))$ [resp. $U \mapsto (\text{coker } D, \mathcal{H}(\Delta \times U))$] est isomorphe au noyau (resp. ou conoyau) du morphisme de faisceaux $\mathcal{H}_Z(B^m(\Delta_{r'})) \xrightarrow{D} \mathcal{H}_Z(B^0(\Delta_{r'}))$, ici, E étant un Banach, on note $\mathcal{H}_Z(E)$ le faisceau des fonctions holomorphes sur Z à valeurs dans E . Nous sommes alors ramenés à la situation classique de perturbation analytique d'un opérateur à indice dans des espaces de Banach; d'où le résultat.

On a aussi des énoncés analogues avec par exemple Z espace analytique ou espace topologique séparé, ou variété différentielle (dans ces deux derniers cas, il faudrait remplacer l'énoncé, comme d'habitude en géométrie analytique relative, par un énoncé de pseudo-cohérence pour

$R\pi_*(\mathcal{K})$; voir divers articles consacrés aux images directes en géométrie analytique: Kiehl, ou Forster-Knorr, à paraître aux Inventiones, ou la thèse de Houzel à paraître quelque part; nous n'entrerons pas dans les détails).

b) *Equations non-linéaires*

Soit Φ une fonction holomorphe sur $\Delta \times U$, Δ le disque unité ouvert, U un ouvert de \mathbb{C}^{m+1} ; une solution de l'équation (E) : $\Phi(x, f, f', \dots, f^{(m)}) = 0$ dans Δ est une fonction f holomorphe sur Δ , telle que l'application $x \rightarrow (f(x), \dots, f^{(m)}(x))$ soit à valeurs dans U , et telle qu'on ait identiquement $\Phi(x, f(x), \dots, f^{(m)}(x)) = 0$. Nous nous proposons d'examiner très rapidement des questions du type suivant: dans quelle mesure peut-on « paramétriser naturellement » les solutions de (E) par les points d'un espace analytique (la notion de « paramétrage naturel » se définit ici, comme d'habitude dans ce genre de problèmes, par la représentabilité d'un foncteur facile à définir; nous laisserons le lecteur expliciter).

Nous examinerons seulement la possibilité de « paramétriser » les solutions voisines d'une solution f_0 donnée; par définition, les points singuliers (E) en f_0 sont les points singuliers de l'équation linéarisée en f_0 , i.e. les points x vérifiant $\frac{\partial \Phi}{\partial y_m}(x, f_0(x), \dots, f_0^{(m)}(x)) = 0$. Nous supposerons que f_0 n'est pas une « intégrale singulière », c'est-à-dire qu'il existe des points non singuliers.

Soit d'abord r , avec $0 < r < 1$, tel que le cercle $\{ |x| = r \}$ ne contienne pas de points singuliers. L'application qui à f fait correspondre $\Phi(x, f, \dots, f^{(m)})$, qu'on notera $f \rightarrow \Psi(f)$ est alors une application analytique définie sur un voisinage de f_0 dans $B^m(\Delta_r)$, à valeurs dans $B^0(\Delta_r)$; comme l'application $\frac{\partial \Psi}{\partial f}(f_0)$ est à indice, d'après une variante de la proposition 1.1, des raisonnements connus montrent que l'espace analytique banachique $\Psi^{-1}(0)$ est, au voisinage de f_0 , de dimension finie (cf. Douady [1]); cela paramètre l'ensemble des solutions de (E) dans $B^m(\Delta_r)$, voisines de f_0 . Il est facile aussi de voir que la dimension f_0 du germe de cet ensemble est comprise entre m et l'indice de l'équation linéarisée

$$\frac{\partial \Psi}{\partial f}(f_0) : B^m(\Delta_r) \rightarrow B^0(\Delta_r)$$

et que ce dernier indice est égal à $m - v$, v le nombre des zéros dans

Δ_r de $\frac{\partial \Phi}{\partial y_m}(x, f_0, \dots, f_0^{(m)})$.

Soit maintenant r quelconque, avec $0 \leq r < 1$. Pour $r' > r$, assez voisin de r , le cercle $|x| = r'$ ne contiendra pas de points singuliers de (E) en f_0 . On pourra alors faire la construction précédente, et obtenir un germe d'espace analytique; pour tous les r' assez voisins de r , ces germes coïncident, en vertu du résultat suivant; il existe $r_0 > r$ possédant la propriété suivante: pour tout r' , avec $r < r' < r_0$, on peut trouver $\varepsilon(r') > 0$ tel que toute f solution de (E) dans $\overset{\circ}{\Delta}_{r'}$, et vérifiant $\sup_{|x| \leq r'} |f(x) - f_0(x)| \leq \varepsilon(r')$ se

prolonge en une solution de (E) dans $\overset{\circ}{\Delta}_{r_0}$ (Cela se déduit facilement des résultats sur la « dépendance des conditions initiales » dans le théorème d'existence et d'unicité). Cela nous définit un germe d'espace analytique paramétrant les solutions voisines de f_0 dans $\mathcal{H}(\Delta_r)$; en particulier, cela vaut pour $r = 0$, i.e. pour les solutions voisines de f_0 dans \mathcal{O} .

Il faut noter cependant que le résultat précédent n'est guère satisfaisant, d'une part, les solutions d'une équation différentielle non-linéaire ont en général des domaines d'existences variables, et non univalents, ce qui rend le problème considéré un peu artificiel. D'autre part, le germe qui vient d'être construit, est bien universel en f_0 ; mais il peut ne pas être universel aux points voisins, à cause de l'existence des singularités mobiles (par contre, s'il n'y a que des singularités fixes, on peut voir que ce canular ne se produit pas).

§ 5. — IRRÉGULARITÉ D'UN SYSTÈME DIFFÉRENTIEL FORMEL

Soit $D = x^{k+1} \frac{d}{dx} - M$, avec $M \in \text{End}(\hat{K}^m)$, $k \in \mathbb{Z}$ on va définir l'irrégularité de D par une adaptation des calculs des § 1-3. Tout d'abord on se ramène à $k = 0$ en posant pour $l \in \mathbb{Z}$: $i(x^l D) = i(D)$. *Dans toute la suite du paragraphe, on supposera donc $k = 0$.*

Rappelons qu'on appelle *réseau* dans \hat{K}^m un sous $\overset{\wedge}{\mathcal{O}}$ -module E de type fini tel qu'on ait $E \otimes \overset{\wedge}{\mathcal{O}} = \hat{K}^m$; il est connu qu'un tel E est libre sur $\overset{\wedge}{\mathcal{O}}$, donc est de la forme $A \overset{\wedge}{\mathcal{O}}^m$, avec $A \in \text{Gl}(m, \hat{K})$ et réciproquement. Si l'on

a deux réseaux $E \subset E_1$, il existe $k \in \mathbb{N}$ vérifiant $x^k E_1 \subset E$; on en déduit immédiatement que E_1/E est de dimension finie sur \mathbf{C} .

Proposition 5.1. Soient E et E_1 deux réseaux vérifiant $D E \subset E_1$. Alors l'application $D : E \rightarrow E_1$ est à indice.

Dans la suite, cet indice sera noté $\chi(D; E, E_1)$.

Démonstration. Supposons d'abord la proposition démontrée pour un couple particulier (E, E_1) , et démontrons-là pour un autre couple (E', E'_1) . Prenons un troisième couple (E'', E''_1) vérifiant $E'' \supset E \cup E'$, $E''_1 \supset E_1 \cup E'_1$, $D E'' \subset E''_1$.

Considérons la suite exacte de morphismes

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & E & \rightarrow & E'' & \rightarrow & E''/E \\ & & \downarrow D & & \downarrow D & & \downarrow D \\ 0 & \rightarrow & E_1 & \rightarrow & E'_1 & \rightarrow & E''_1/E_1 \rightarrow 0 \end{array}$$

La première flèche verticale est à indice par hypothèse, et la troisième l'est aussi puisqu'elle va d'un espace de dimension finie dans un autre. Par suite la seconde est à indice; de plus, on a

$$(5.2) \quad \chi(D; E'', E''_1) = \chi(D; E, E_1) + \dim E''/E - \dim E''_1/E_1$$

On opère ensuite de même avec les couples (E', E'_1) et (E'', E''_1) .

Reste à trouver un couple particulier (E, E_1) tel que $D : E \rightarrow E_1$ soit à indice; pour cela, en utilisant le théorème (3.1) (qui est vrai aussi pour \hat{K} au lieu de K), on se ramène au cas où M a la forme suivante

$$(5.3) \quad M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ \lambda_0 & \dots & \lambda_{m-2} & \lambda_{m-1} \end{bmatrix}$$

Posons comme au paragraphe 3, $\Delta = \partial^m - \lambda_{m-1} \partial^{m-1} - \dots - \lambda_0$, avec $\partial = x \frac{d}{dx}$; posons encore $i = i(\Delta) = \sup (0, \sup -v(\lambda_p))$ et prenons $E = \hat{\mathcal{O}}^m$, $E_1 = \hat{\mathcal{O}}^{m-1} \oplus x^{-1} \hat{\mathcal{O}}$; les raisonnements des § 1-3 montrent que

l'application $D : E \rightarrow E_1$ a un noyau (resp. un conoyau) isomorphe au noyau (resp. du conoyau) de l'application $\Delta : \hat{\mathcal{O}} \rightarrow x^{-1} \hat{\mathcal{O}}$, et que cette dernière application est d'indice nul. D'où la proposition.

Considérons maintenant tous les couples de réseaux (E, E_1) avec $E \subset E_1, DE \subset E_1$; je dis que le nombre $\chi(D; E, E_1) + \dim E_1/E$ est indépendant du couple (E, E_1) . Pour établir ce résultat, il suffit de raisonner comme à la proposition précédente, et d'utiliser 5.2. Cela justifie la définition suivante:

Définition 5.3. On appelle irrégularité de D le nombre $\chi(D; E, E_1) + \dim E_1/E$, E et E_1 étant deux réseaux vérifiant $E \subset E_1, DE \subset E_1$.

Le calcul fait à la fin de la proposition précédente, montre immédiatement que si M est de la forme 5.3, on a, comme en 3.2.

$$(5.4) \quad i(D) = \sup (0, \sup -v(\lambda_p))$$

Par conséquent, notre définition coïncide dans le cas analytique avec celle du § 3; et l'on a encore $i(D) \geq 0$.

On définit encore les points singuliers réguliers comme au § 3, avec \hat{K} au lieu de K (il est équivalent de dire qu'il existe un réseau E tel qu'on ait $DE \subset E$). La proposition suivante se démontre alors comme 3.4.

Proposition 5.5. Pour que 0 soit un point singulier régulier, il faut et il suffit qu'on ait $i(D) = 0$.

Proposition 5.6. Si l'on a $M = \sum_{-k}^{+\infty} M_p x^p$ ($k \geq 1$), on a $i(D) \leq k m$; pour qu'on ait $i(D) \leq k m$, il faut et il suffit que M_{-k} soit inversible.

Pour démontrer cette proposition, nous allons appliquer la définition 5.3, avec $E = \hat{\mathcal{O}}^m$, $E_1 = x^{-k} \hat{\mathcal{O}}^m$; en remplaçant D par $x^k D$, il revient au même de démontrer l'assertion suivante: l'indice de l'application $x^k D : \hat{\mathcal{O}}^m \rightarrow \hat{\mathcal{O}}^m$ est ≤ 0 ; cet indice est nul si et seulement si M_{-k} est inversible.

Supposons d'abord M_{-k} inversible; pour tout monôme $A x^p$, $A \in \mathbf{C}^m$, on a $(x^k D)(A x^p) = M_{-k} A x^p + (\text{termes d'ordre } \geq p+1)$; donc, de proche en proche, on voit que $x^k D : \hat{\mathcal{O}}^m \rightarrow \hat{\mathcal{O}}^m$ est bijectif, donc d'indice nul.

Dans le cas général, prenons un p entier ≥ 0 ; les arguments de suite exacte déjà utilisés en 5.1 montrent que l'application précédente a même indice que

$$x^k D : \hat{\mathfrak{m}}^p(\hat{\mathcal{O}}^m) \rightarrow \hat{\mathfrak{m}}^p(\hat{\mathcal{O}}^m) \quad (\hat{\mathfrak{m}}, \text{l'idéal maximal de } \hat{\mathcal{O}}).$$

Cette dernière application est injective pour p assez grand, puisque $\ker(x^k D, \hat{\mathcal{O}}^m)$ est de dimension finie sur \mathbf{C} . Donc son indice est ≤ 0 , et il est nul si et seulement si l'application est surjective. Dans ce dernier cas, par passage au quotient, l'application $x^k D$ de $\hat{\mathfrak{m}}^p(\hat{\mathcal{O}}^m) / \hat{\mathfrak{m}}^{p+1}(\hat{\mathcal{O}}^m)$ dans lui-même sera encore surjective; or dans la base évidente, la matrice de cette application est précisément M_{-k} ; donc M_{-k} doit être surjective, donc inversible. D'où la proposition.

Signalons pour terminer, sans démonstration, une autre manière de définir $i(D)$, due à Gérard et Levelt [1]. On prend un réseau E et on forme la suite de réseaux E_p définie par $E_0 = E, \dots, E_p = E_{p-1} \oplus D E_{p-1}$ (le fait qu'on obtienne bien ainsi deux réseaux résulte facilement de la formule $D(\varphi F) = \varphi D F + (\partial\varphi) F, \varphi \in \hat{\mathcal{O}}$); posons ensuite $\bar{E}_p = E_p / E_{p-1}$. L'application D induit une application surjective $\bar{D}: \bar{E}_p \rightarrow \bar{E}_{p+1}$, donc $\dim_{\mathbf{C}} \bar{E}_p$ est décroissante, et indépendante de p pour p assez grand. On démontre que cette dimension ne dépend pas non plus de E , et qu'elle est précisément égale à $i(D)$.

Supposons en particulier que 0 soit un point singulier régulier: on aura alors $\bar{E}_p = 0$ pour p assez grand; en fait, on démontre même qu'on a nécessairement, quel que soit $E: \bar{E}_m = 0$, donc $D E_{m-1} \subset E_{m-1}$; ceci donne un critère simple pour reconnaître effectivement si l'on est dans le cas d'un point singulier régulier (ce critère se trouve déjà, au moins implicitement, dans Manin [1]. Un critère différent se trouve dans Moser [1]).

§ 6. — POINTS SINGULIERS RÉGULIERS

Ce paragraphe est en grande partie composé de rappels, empruntés à Wasow [1]. On pourra trouver un exposé plus systématique dans Manin [1].

Traitons d'abord le cas formel; soit $D = x \frac{d}{dx} - M$, avec, $M \in \text{End}(\hat{\mathcal{O}}^m)$ (i.e. $M \in \text{End}(\hat{K}^m)$, sans pôle).

Proposition 6.1. *Supposons que deux valeurs propres distinctes de $M(0)$ ne diffèrent jamais d'un entier. Il existe alors un et un seul $A \in \text{End}(\hat{\mathcal{O}}^m)$, avec $A(0) = I$ tel que la transformation $F = A G$ transforme D en $D' = x \frac{d}{dx} - M(0)$.*

Posons en effet $M = \sum_0^{\infty} M_p x^p$, $A = \sum_0^{\infty} A_p x^p$, avec $A_0 = I$; on doit résoudre l'équation

$$x \frac{dA}{dx} = MA - A M_0$$

en égalant les coefficients de x^p dans les deux membres, on trouve d'abord $M_0 A_0 - A_0 M_0 = 0$ qui est vérifié, et ensuite, pour $p \geq 1$

$$(pI - M_0) A_p + A_p M_0 = \Phi(A_0, \dots, A_{p-1}; M_0, \dots, M_p)$$

On pourra résoudre ces équations par récurrence, d'une manière et d'une seule, en vertu du lemme suivant, qu'on laisse au lecteur à titre d'exercice.

Lemme 6.2. Soient $P \in \text{End } \mathbf{C}^p$ et $Q \in \text{End } \mathbf{C}^q$ donnés; pour que l'équation $PX - XQ = Y$, avec $X, Y \in \text{End}(\mathbf{C}^q, \mathbf{C}^p)$ ait une solution X et une seule quel que soit Y il faut et il suffit que P et Q n'aient pas de valeur propre commune.

La proposition résulte immédiatement de là. Remarquons aussi que l'opérateur différentiel $A \mapsto x \frac{dA}{dx} - MA + A M_0$ a un point singulier régulier en 0; par suite, en vertu des théorèmes de comparaison (ou d'un résultat classique, dans ce cas particulier), si M est convergente, A sera aussi convergente.

Montrons ensuite comment on peut ramener le cas général au cas où $M(0)$ satisfait les hypothèses de la proposition 6.1; soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres distinctes de M_0 ; il suffit de montrer qu'on peut faire une transformation $A \in \text{Gl}(m, \hat{K})$ telle que $N = A^{-1}MA - xA^{-1}\frac{dA}{dx}$ soit sans pôle et ait comme valeurs propres $(\lambda_1 - 1), \lambda_2, \dots, \lambda_p$: en appliquant par récurrence ce procédé, on amènera les valeurs propres de $M(0)$ qui diffèrent d'un entier à être égales.

Par un changement linéaire de coordonnées, on peut supposer qu'on a $M(0) = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$, avec P et Q triangulaires inférieures, P ayant pour valeurs propres $\lambda_2, \dots, \lambda_p$, et Q ayant l'unique valeur propre λ_1 ; soient p et q respectivement l'ordre de P et l'ordre de Q ; on prend avec des notations évidentes

$$A = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & xI_q \end{pmatrix}.$$

En posant $M_1 = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, on trouve $N(0) = \begin{pmatrix} P & 0 \\ \gamma & Q - I \end{pmatrix}$; cette matrice est encore triangulaire inférieure, et a visiblement les valeurs propres cherchées; d'où le résultat.

Passons maintenant au cas \mathcal{C}^∞ ; nous emploierons les notations suivantes, dans la fin de ces exposés: \mathcal{E} désigne l'espace des germes de fonctions \mathcal{C}^∞ en $0 \in \mathbf{R}$, à valeurs complexes (ou à valeurs réelles, dans quelques cas où ce sera explicitement mentionné); l'application $\mathcal{E} \rightarrow \hat{\mathcal{O}}$ qui à f associe sa série de Taylor en 0 sera notée $f \mapsto \hat{f}$. On pose encore $K\mathcal{E} = K \otimes \mathcal{E}$, espace des germes en 0 de «fonctions semi-méromorphes»; l'application $\mathcal{E} \rightarrow \hat{\mathcal{O}}$ s'étend alors en une application $K\mathcal{E} \rightarrow \hat{K}$, et il est bien connu que ces applications sont surjectives. Si $f \in K\mathcal{E}$, $\hat{f} \in \hat{\mathcal{O}}$, on a $f \in \mathcal{E}$ à cause du lemme élémentaire suivant: soit $g \in \mathcal{E}$, avec $g(0) = 0$; alors $\frac{g}{x} \in \mathcal{E}$. Les $f \in \mathcal{E}$ qui vérifient $\hat{f} = 0$ seront dites «plates».

Si l'on a $D = x^{k+1} \frac{d}{dx} - M$, M à coefficients dans $K\mathcal{E}$, on posera $\hat{D} = x^{k+1} \frac{d}{dx} - \hat{M}$, $i(\hat{D}) = i(D)$; si $i(D) = 0$, on dira que 0 est un point singulier régulier de D .

La proposition suivante est un cas particulier d'un théorème qui sera démontré par la suite.

Proposition 6.3. Soit $D = x^{k+1} \frac{d}{dx} - M$, avec $M \in \text{End}(K\mathcal{E}^m)$ $k \in \mathbf{Z}$ et $i(D) = 0$; soit $G \in K\mathcal{E}^m$ donné; supposons qu'il existe $H \in \hat{K}^m$, avec $\hat{D}H = \hat{G}$. Alors il existe $F \in K\mathcal{E}^m$ vérifiant $DF = G$, $\hat{F} = H$, et un tel F est unique.

Prenons $F_1 \in K\mathcal{E}^m$ tel qu'on ait $\hat{F}_1 = H$, et cherchons F sous la forme $F_1 + F_2$, avec F_2 plat; on doit aussi avoir $DF_2 = G - DF_1$, et le second membre est plat par hypothèse. Par conséquent, on peut supposer qu'on est dans le cas suivant: G est plat et $H = 0$ (i.e. on cherche F plat).

Comme une fonction plate le reste après multiplication par x^l ($l \in \mathbf{Z}$), on peut d'abord se ramener à $k = 1$; on peut ensuite, au moyen d'une transformation $F = AF'$, $A \in \text{GL}(m, K\mathcal{E})$ (ensemble des matrices d'ordre m inversibles à coefficients dans $K\mathcal{E}$), et en utilisant les transformations

formelles qui précédent, se ramener au cas où l'on a $M = M_0 + M_\infty$, M_0 constante et M_∞ plate.

Enfin, il suffit de trouver F à droite de 0 et tendant vers 0 ainsi que toutes ses dérivées en 0 (nous dirons qu'une telle F est « plate à droite en 0 »); on fera ensuite la même opération à gauche, en changeant x en $-x$.

Posons alors $F = \exp(M_0 \log x) F_1$, $G = \exp(M_0 \log x) G_1$; il est clair par l'expression explicite de $\exp(M_0 \log x)$ pour M_0 triangulaire, que F et F_1 seront simultanément plates à droite en 0, et de même pour G et G_1 . On est ramené à l'équation

$$x \frac{dF_1}{dx} - N_\infty F_1 = G_1, \text{ avec } N_\infty = \exp(-M_0 \log x) M_\infty \exp(M_0 \log x),$$

donc N_∞ est plate à droite en 0; en divisant par x , on est ramené au théorème d'existence et d'unicité usuel. D'où la proposition.

Corollaire 6.4. Soit $D = x \frac{d}{dx} - M$, avec $M \in \text{End}(K\mathcal{E}^m)$, et supposons que 0 soit un point singulier régulier. Il existe alors $A \in \text{G1}(m, K\mathcal{E})$ tel que la transformation $F = AF'$ transforme D en $D' = x \frac{d}{dx} - N$, avec N constant.

Comme ci-dessus, on peut supposer $M = M_0 + M_\infty$, avec M_0 constant, M_∞ plat. Considérons alors l'équation

$$x \frac{dA}{dx} = M A - A M_0, \text{ avec } A \text{ à coefficients dans } \mathcal{E}, A(0) = I.$$

Cette équation admet pour solution formelle I ; d'après 6.3, elle admet donc une solution A , avec $\hat{A} = I$; d'où le résultat.

On déduit immédiatement de ce corollaire, l'expression générale d'une matrice fondamentale d'un système à points singuliers réguliers, et à coefficients \mathcal{C}^∞ au voisinage de 0.

§ 7. — LE CAS \mathcal{C}^∞ : ÉNONCÉ DU THÉORÈME PRINCIPAL

Soit k un entier; soit d'autre part Φ une fonction de classe \mathcal{C}^∞ des $m+1$ variables x et $Y = (y_1, \dots, y_m)$, définie au voisinage de $(0, Y^0)$, et à valeurs dans \mathbf{R}^m ; notons $\hat{\Phi}$ son développement de Taylor en $(0, Y^0)$.

Théorème 7.1. Supposons qu'il existe $H \in \hat{\mathcal{O}}^m$, à coefficients réels, avec $H(0) = Y^0$, qui vérifie l'équation $x^{k+1} \frac{dH}{dx} = \hat{\Phi}(x, H)$. Alors il existe $F \in \mathcal{E}^m$, à valeurs réelles vérifiant $\hat{F} = H$, $x^{k+1} \frac{dF}{dx} = \Phi(x, F)$.

Nous allons d'abord indiquer comme ce théorème peut être déduit d'un lemme sur les équations linéaires, lemme qui sera démontré dans les paragraphes suivants. Soient $a > 0$, et p entier ≥ 0 ; nous désignerons par $B(p; a)$ l'espace des fonctions f continues sur $[0, a]$ à valeurs complexes, et telles que $x^{-p} f(x)$ soit bornée sur cet intervalle; on posera $|f|_p = \sup_{x \in [0, a]} |x^{-p} f(x)|$. Pour $f \in B(p; a)^m$, $F = (f_1, \dots, f_m)$ on posera par exemple $|F|_p = \sup |f_i|_p$.

Lemme fondamental 7.2. Soit $D = x^{k+1} \frac{d}{dx} - M$, avec $M \in \text{End}(\mathcal{E}^m)$ et $k \in \mathbf{Z}$; on peut trouver $l \in \mathbf{Z}$, $p_0 \in \mathbf{N}$, et $a_0 > 0$, possédant les propriétés suivantes: Pour $0 < a \leq a_0$, il existe une application linéaire $K : B(p_0, a)^m \rightarrow B(p_0 - l, a)^m$ inverse à droite de D (i.e. $D K G = G$), et telle que, pour tout $p \geq p_0$, la restriction de K à $B(p, a)^m$ soit une application linéaire continue $B(p, a)^m \rightarrow B(p - l, a)^m$.

Remarquons que l'on peut aussi supposer la norme de $K : B(p; a)^m \rightarrow B(p - l; a)^m$ majorée par une quantité indépendante de a (mais non de p), pourvu qu'on ait supposé $p_0 - l \geq 0$, ce qu'on fera par la suite; en effet, supposons K obtenu pour $a = a_0$, et notons le K_{a_0} ; pour obtenir un K_a , on peut opérer ainsi: soit \tilde{G} le prolongement à $]0, a_0]$ d'une fonction G continue sur $]0, a]$ obtenu en posant $\tilde{G}(x) = G(a)$, $a \leq x \leq a_0$; on a évidemment $|\tilde{G}|_p = |G|_p$, et l'on posera simplement $K_a G = (\text{restriction à }]0, a] de } K_{a_0} \tilde{G})$.

Montrons comment ce théorème 7.1 résulte du lemme précédent (appliqué aux fonctions à valeurs réelles). Comme au § 6, on se ramène d'abord au cas où $Y^0 = 0$, $H = 0$; on a alors $\hat{\Phi}(x, 0) = 0$, et on cherche F plat; il suffit de trouver F à droite de 0 (on le trouvera ensuite à gauche de la même manière, en changeant x en $-x$); écrivons alors $\Phi(x, Y) = \Phi(x, 0) + M(x) Y + \Psi(x, Y)(Y, Y)$ avec $M \in \text{End}(\mathcal{E}^m)$, Ψ une forme quadratique à coefficients $\mathcal{C}^\infty(x, Y)$; on applique le lemme précédent, et l'on cherche $F \in B(p, a)^m$ (p et a à déterminer), solution de l'équation $F = K [\Phi(x, 0) + \Psi(x, F)(F, F)]$.

Notons $L(F)$ le second membre de l'équation précédente, et choisissons $p \geq p_0$, et vérifiant $p - l \geq 1$. Supposons $a \leq 1$; on a alors, puisque $\Phi(x, 0)$ est plat $|\Phi(x, 0)|_{p+1} \leq C(a)$, avec $C(a) \rightarrow 0$ si $a \rightarrow 0$; d'autre part, si $|F|_p \leq 1$, on a $|F|_0 \leq 1$ donc $\Psi(X, F)$ est borné, et par suite on a, avec C indépendant de a :

$$|(\Psi(x, F)(F, F))_{2p}| \leq C |F|_p^2, \text{ donc } |\Psi(x, F)(F, F)|_{p+l} \leq C a |F|_p^2$$

il résulte de là, et de la remarque qui suit l'énoncé du lemme que, pour a assez petit, L envoie la boule unité Σ de $B^m(p, a)$ dans elle-même.

Un calcul analogue montre que pour $|F|_p \leq 1$, $|G|_p \leq 1$, on a

$$|\Psi(x, F)(F, F) - \Psi(x, G)(G, G)|_{2p} \leq C |F - G|_p$$

d'où

$$|\Psi(x, F)(F, F) - \Psi(x, G)(G, G)|_{p+l} \leq C a |F - G|_p$$

on en déduit que, pour a assez petit, L est contractante sur Σ ; alors l'équation $F = L(F)$ a une solution et une seule dans Σ ; comme F vérifie $x^{k+1} \frac{dF}{dx} = \Phi(x, F)$ dans $]0, a]$, F est de classe \mathcal{C}^∞ sur $]0, a]$. Reste à montrer que F est plate en 0.

Tout d'abord, montrons que $x^{-q} F$ est borné sur $]0, a]$, quel que soit $q \geq p$; ceci est vrai pour p , donc par récurrence, il suffit de le montrer pour $q + 1$, en supposant le résultat établi pour q ; or, on a alors $F \in B(q; a)^m$, donc $\Psi(x, F)(F, F) \in B(2q; a)^m$; a fortiori $\Psi(x, F) \in B(q+l+1, a)^m$ et, par hypothèse x , $\Phi(x, 0) \in B(q+l+1, a)^m$; donc $L(F) \in B(q+1, a)^m$, ce qui démontre le résultat; en utilisant l'équation différentielle $x^{k+1} \frac{dF}{dx} = \Phi(x, 0) + M(x)F + \Psi(x, F)(F, F)$, et le résultat précédent, on voit que $x^{-q} \frac{dF}{dx}$ est encore borné pour tout q ; en dérivant l'équation, on voit que $x^{-q} \frac{d^2F}{dx^2}$ est encore borné pour tout q , et ainsi de suite. Par conséquent modulo le lemme 7.2, le théorème 7.1 est complètement démontré.

Proposition 7.3. Si D a un point singulier régulier en 0, le lemme 7.2. est vrai.

Il est clair que, si le lemme garde un sens lorsqu'on suppose $M \in \text{End}(K\mathcal{E}^m)$, et que d'autre part, on ne change rien (sauf les valeurs éventuelles de p_0 et 1) en multipliant D par x^p ($p \in \mathbf{Z}$) et en faisant une

transformation du type $F = A F_1, G = A G_1$, avec $A \in \text{G1}(m, K\mathcal{E})$. D'après le corollaire (6.4), on peut donc supposer $k = 1$, et M constant; on peut même supposer que M est triangulaire inférieure; alors en raisonnant par récurrence, on est ramené à démontrer le résultat lorsque D est l'opérateur différentiel scalaire $x \frac{d}{dx} - \lambda$, $\lambda \in \mathbf{C}$; ce cas peut être laissé au lecteur, (ici, on pourra même prendre $l = 0$, mais peu importe).

§ 8. — LE CAS FAVORABLE

La proposition suivante est classique:

Proposition 8.1. *Avec les notations du lemme 7.2, supposons $k \geq 1$, et supposons que les valeurs propres λ_j de $M(0)$ vérifient $\text{Re}(\lambda_j) \neq 0$. Alors le lemme 7.2 est vrai avec $l = 0$.*

Démonstration

i) Il suffit de démontrer la proposition pour $M = M(0)$; en effet, supposons le résultat établi dans ce cas; soit $K^0 : B(p; a)^m \rightarrow B(p; a)^m$ l'inverse à droite de $x^{k+1} \frac{d}{dx} - M(0)$ (K^0 dépend de a , mais non de $p \geq p_0$); on pose alors $M(x) = M(0) + x N(x)$, $N \in \text{End}(\mathcal{E}^m)$, et on note L l'application $F \mapsto x N K^0 F$; il suffit de trouver K^1 , inverse de $I - L$, car alors $K^0 K^1 = K$ sera un inverse à droite de D .

Or, pour $a \leq a_0$, on a $|K_0 F|_{p_0} \leq C |F|_{p_0}$ (cf. remarque suivant l'énoncé du lemme 7.2), d'où, par un calcul analogue à ceux du § 7: $|L F|_{p_0} \leq C' a |F|_{p_0}$; en choisissant a pour qu'on ait $C' a < 1$, on voit que la série $K^1 = \sum L^n$ converge dans l'espace des applications linéaires continues de $B(p_0; a)^m$ dans lui-même.

Montrons par récurrence sur $p \geq p_0$ que K^1 envoie continuement $B(p; a)^m$ dans lui-même; supposons donc le résultat acquis pour $p - 1$; l'équation $H = K^1 G$ équivaut à $H = G + L H$; si G parcourt un borné de $B(p; a)^m$, H parcourt un borné de $B(p-1; a)^m$ par hypothèse de récurrence; donc $L H = x N K^0 H$ parcourt un borné de $B(p; a)^m$; donc $H = C + L H$ parcourt un borné de $B(p; a)^m$, ce qui démontre le résultat.

Il est alors clair que $K = K^0 K^1$ répond à la question; d'où la proposition.

ii) Démontrons maintenant le résultat pour M constant; on peut supposer M triangulaire inférieure; alors par récurrence sur m , on est ramené à établir le résultat pour l'opérateur différentiel scalaire $x^{k+1} \frac{d}{dx} - \lambda$, avec $\lambda \in \mathbf{C}$, $Re \lambda \neq 0$; posons $\lambda = k(\mu + iv)$; la transformation $f = \exp(-ivx^{-k})f_1$ nous ramène au cas où $v = 0$; alors la solution générale de l'équation $x^{k+1} \frac{d}{dx} f - k\mu f = g$ s'écrit

$$f(x) = \int_{x_0}^x t^{-k-1} \exp[\mu(t^{-k} - x^{-k})] g(t) dt.$$

Pour $\mu > 0$, on choisira $x_0 = a$ (par exemple $x_0 = 1$), et pour $\mu < 0$, on choisira $x_0 = 0$; dans les deux cas, on doit démontrer que pour $p \in \mathbf{N}$, et x tendant vers 0, on a

$$\int_{x_0}^x t^{p-k-1} \exp[(\mu(t^{-k} - x^{-k})] g(t) dt = 0(x^p)$$

Faisons la démonstration pour $\mu > 0$ (le cas $\mu < 0$ est analogue et un peu plus simple); par le changement de variables $s = t^{-k}$, $y = x^{-k}$, $p/k = q$, on est ramené à démontrer qu'on a, pour $y \rightarrow +\infty$.

$$\int_1^y s^{-q} \exp[\mu(s-y)] dy = 0(y^{-q})$$

En intégrant par parties, on trouve que le terme tout intégré est de l'ordre voulu, et il reste à évaluer $\int_1^y s^{-q-1} \exp[\mu(s-y)] dy$; supposant $y > 2$, on coupe la dernière intégrale en $\int_1^{y/2}$ et $\int_{y/2}^y$; on majore $\int_1^{y/2}$ en y remplaçant s^{-q-1} par 1, et $\int_{y/2}^y$ en y remplaçant $\exp[\mu(s-y)]$ par 1; nous laissons les détails au lecteur (en fait, en continuant les intégrations par parties, on obtiendrait un développement asymptotique de l'intégrale envisagée; cela correspond en fait à démontrer le théorème 7.1 pour l'équation $x^{k+1} \frac{d}{dx} f - k\mu f = x^p$, et la solution formelle évidente de cette équation!). La proposition est donc démontrée.

Corollaire 8.2 (cf. Wasow [1]). *Dans les hypothèses du théorème 7.1, supposons en outre qu'on ait $k \geq 1$, et que la matrice $\frac{\partial \Phi}{\partial Y}(0, Y^0)$ ait toutes ses valeurs propres de partie réelle non nulle. Alors le théorème (7.1) est vrai.*
 Cela résulte de la démonstration de l'implication $(7.2) \Rightarrow (7.1)$.

Remarque 8.3. Dans les hypothèses précédents, et même dans l'hypothèse plus faible « $\Phi(0, Y^0) = 0, \frac{\partial \Phi}{\partial Y}(0, Y^0)$ inversible », il existe une et une seule série formelle H vérifiant $H(0) = Y^0$ et $x^{k+1} \frac{dH}{dx} = \hat{\Phi}(x, H)$. Cela se voit par le même calcul que le théorème des fonctions implicites pour les séries formelles (puisque l'application $H \rightarrow x^{k+1} \frac{dH}{dx}$ augmente strictement le degré des monômes).

Donnons maintenant une application des résultats précédents qui jouera un rôle essentiel dans la suite.

Proposition 8.4. (Sibuya ; cf. Wasow [1]). Soit $D = x^{k+1} \frac{d}{dx} - M$, avec $M \in \text{End } (\mathcal{E}^m)$. Supposons qu'on ait une décomposition de $M(0)$ en deux blocs $M(0) = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$, $P \in \text{End } (\mathbf{C}^p)$, $Q \in \text{End } (\mathbf{C}^q)$, $p + q = m$; désignons par λ_i (resp μ_j) les valeurs propres de P (resp de Q) et supposons que, pour tout (i, j) , on ait $\text{Re } (\lambda_i) \neq \text{Re } (\mu_j)$. Alors il existe $A \in \text{Gl}(m, \mathcal{E})$, avec $A(0) = I$ tel que la transformation $F = A F$, transforme D en $x^{k+1} \frac{d}{dx} - N$, avec $N = \begin{pmatrix} N' & 0 \\ 0 & N'' \end{pmatrix}$, $N' \in \text{End } (\mathcal{E}^p)$, $N'' \in \text{End } (\mathcal{E}^q)$.

Posons $M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix}$ avec $M_{11} \in \text{End } (\mathcal{E}^p)$, etc.; on cherche a priori A sous la forme $A = I + \begin{pmatrix} 0 & A' \\ A'' & 0 \end{pmatrix}$, $A'(0) = 0, A''(0) = 0$; on doit avoir $x^{k+1} \frac{dA}{dx} = MA - AN$; en égalant les blocs d'indice (11) et (21) dans cette équation, on trouve

$$\begin{cases} M_{11} + M_{12} A'' = N' \\ M_{21} + M_{22} A'' = A'' N' + x^{k+1} \frac{dA''}{dx} \end{cases}$$

En tirant N' de la première équation, on trouve l'équation suivante pour A'' : $x^{k+1} \frac{dA''}{dx} = M_{21} + M_{22} A'' - A'' M_{11} - A'' M_{12} A''$.

Nous allons appliquer à cette équation la remarque 8.3 et le corollaire 8.2 (le fait que notre équation soit à coefficients complexes n'est pas

gênant, il suffirait de séparer les parties réelles et imaginaires); on prend ici $\Phi(x, A'') = M_{21} + M_{22} A'' - A'' M_{11} - A'' M_{12} A''$; on a bien $\Phi(0, 0) = M_{21}(0) = 0$; et $\frac{\partial \Phi}{\partial A''}(0, 0)$ est l'application $\alpha \mapsto M_{22}(0)\alpha - \alpha M_{11}(0) = Q\alpha - \alpha P$, $\alpha \in \text{Hom}(\mathbf{C}^q, \mathbf{C}^p)$; le lemme (6.2) montre que les valeurs propres de cette application sont les $\mu_j - \lambda_i$, donc ont leur partie réelle non nulle; la remarque 8.3 donne alors l'existence d'une solution formelle \hat{A}'' , et le corollaire 8.2 l'existence de A'' ; on opère de même avec les blocs (1 2) et (2 2) pour trouver A' .

Remarque 8.5. Si l'on affaiblit les hypothèses de la proposition 8.4 en supposant seulement qu'on a, pour tout (i, j) $\lambda_i \neq \mu_j$, la partie formelle du raisonnement précédent montre qu'on peut trouver A , avec $A(0) = I$,

tel que \hat{N} soit de la forme $N = \begin{pmatrix} \hat{N}' & 0 \\ 0 & \hat{N}'' \end{pmatrix}$. Cela jouera un rôle important

dans la suite (en fait, le théorème (7.1) montrera finalement que la proposition 8.4 reste vraie sous cette hypothèse affaiblie; mais, au point où nous en sommes, nous n'avons pas encore le droit d'utiliser ce résultat; comme on va le voir, cela va nous obliger à quelques contorsions!).

§ 9. — DÉMONSTRATION DU LEMME FONDAMENTAL

A. Démontrons d'abord le résultat pour $m = 1$; soit $D = x^{k+1} \frac{d}{dx} - m$, $m \in \mathcal{E}$; si $\text{Re } m(0) \neq 0$, cela résulte de 8.1; si $k \geq 1$, et $m(0) = ik\lambda$, $\lambda \neq 0$, la transformation $f = \exp(-i\lambda x^{-k})f_1$ nous ramène à $m(0) = 0$, donc on est ramené de k à $k - 1$; par récurrence, on est ramené à $k = 0$, i.e. au cas d'un point singulier régulier.

Dans la suite, nous procéderons par récurrence sur m , et supposerons donc le résultat établi pour $1, \dots, m - 1$.

B. Si $k = 0$, le résultat est établi par la proposition 7.3. Supposons donc $k \geq 1$, et soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres distinctes de $M(0)$; supposons qu'on ait, pour un i au moins $\text{Re } (\lambda_i) \neq 0$; alors le lemme fondamental résulte de l'hypothèse de récurrence; en effet, si pour tout i on a $\text{Re } \lambda_i \neq 0$, on est dans le cas favorable 8.1; si, pour un j , on a $\text{Re } \lambda_j = 0$, on peut décomposer $M(0)$ par une transformation linéaire en deux blocs $\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$, les

valeurs propres de P (resp de Q) étant toutes de partie réelle $\neq 0$ (resp $= 0$); le lemme fondamental résulte alors de 8.4 et de l'hypothèse de récurrence.

C. Supposons maintenant $k \geq 1$, et supposons que les valeurs propres de $M(0)$ vérifient toutes $\operatorname{Re} \lambda_j = 0$. On appellera « système standard » un tel système, muni d'une décomposition du type suivant: on suppose donnée une partition de $\{1, \dots, m\}$ en sous-ensembles $\{1, \dots, m_1\}$, $\{m_1 + 1, \dots, m_1 + m_2\}, \dots, \{m_1 + \dots + m_{p-1}, \dots + m_1 + \dots + m_p = m\}$ avec $m_1, \dots, m_p \neq 0$, tel que, dans cette décomposition, les termes non diagonaux de M soient nuls (« les termes de couplage entre les différents blocs sont plats »). A un tel « système standard », on associe les deux entiers $C(D) = m - p$ (son « couplage ») et $i(D)$, son irrégularité; on a $0 \leq C(D) \leq m - 1$, et $C(D) = 0$ signifie que tous les m_i sont égaux à 1; d'autre part, en posant

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} \hat{M}_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \hat{M}_p \end{pmatrix}. \quad \hat{D}_j = x^{k+1} \frac{d}{dx} - \hat{M}_j,$$

on a facilement $i(D) = \sum i(\hat{D}_j)$.

On ordonne les couples (C, i) lexicographiquement, i.e. on pose $(C, i) \leq (C', i')$ si $C < C'$ ou $C = C', i \leq i'$. Pour démontrer le lemme fondamental, nous allons faire une seconde récurrence sur (C, i) , et plus précisément démontrer le résultat suivant.

Lemme (C, i) . (On suppose toujours m fixé, et le résultat démontré pour $m' < m$).

Soit $i > 0$, et supposons le résultat démontré pour les systèmes standard D avec $(C(D), i(D)) < (C, i)$. Alors, le résultat est vrai pour les systèmes standard D vérifiant $(C(D), i(D)) = (C, i)$.

Par récurrence, on sera ramené au cas où $i(D) = 0$, c'est-à-dire au cas des points singuliers réguliers, cas réglé par la proposition 7.3.

D. Restons dans la situation précédente, et supposons qu'une des valeurs propres λ_1 d'un des $M_j(0)$, disons de $M_1(0)$ soit $\neq 0$. Deux cas sont alors possibles. 1) Si $M_1(0)$ a deux valeurs propres distinctes d'après la remarque (8.5) on peut décomposer le système \hat{D}_1 ; par ce procédé, on a diminué $C(D)$.

2) Si toutes les valeurs propres de $M_1(0)$ sont égales à $\lambda_1 = ik\mu$, ($\mu \in \mathbf{R} - \{0\}$), on fait la transformation $F_1 = \exp(-i\mu x^{-k}) F'_1$, $F_2 =$

$F'_2, \dots, F_p = F'_p$ (en posant $F_1 = (f_1, \dots, f_{m_1})$ etc.); alors on ne change pas $\hat{D}_2, \dots, \hat{D}_p$, et on a remplacé \hat{D}_1 par $\hat{D}'_1 = x^{k+1} \frac{d}{dx} - (\hat{M}_1 - \lambda_1 I)$; on n'a donc pas changé $C(D)$ et, d'après la proposition (5.6), on a diminué $i(\hat{D}_1)$, donc $i(D) = \sum i(\hat{D}_j)$. Dans les deux cas, on a démontré (C, i) .

Notons que ce procédé permet, en particulier en raisonnant comme en A et B de démontrer $(0, i)$ par récurrence descendante sur i (formellement, cette remarque n'est pas indispensable pour la suite).

E. Reste à régler le cas où les $M_j(0)$ sont tous nilpotents. Nous allons faire une transformation (« transformation de Turrrittin-Katz », voir Deligne [1] ou Katz [1]) qui élimine ce cas. Pour plus de clarté, expliquons d'abord en quoi consiste cette transformation lorsqu'on a $p = 1$. Comme on l'a déjà observé en démontrant la proposition 7.3 on peut multiplier D par une puissance de x , et faire sur D une transformation du type $F = AF_1$, avec $A \in \mathrm{Gl}(m, K\mathcal{E})$; en particulier, en utilisant le théorème (3.1) (avec \hat{K} au lieu de K), on peut supposer que l'on a $D = x \frac{d}{dx} - M$, \hat{M} ayant la forme suivante

$$\hat{M} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 & 1 \\ \lambda_1 & \cdot & \cdot & \hat{\lambda}_{m-1} & \lambda_m \end{bmatrix} \quad \text{avec } \lambda_j \in K\mathcal{E}$$

Faisons alors la transformation suivante

$f_1 = x^{-r} g_1, f_2 = x^{-2r} g_2, \dots, f_m = x^{-mr} g_m, r \geq 0$ à déterminer;

le système devient $G \mapsto x^{r+1} \frac{dG}{dx} - N G$, avec \hat{N} donné par la formule suivante

$$N = \begin{bmatrix} r x^r & 1 & 0 & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \\ \hat{\lambda}_1 x^{mr} & \dots & \hat{\lambda}_{m-1} x^{2r} & (m-1)r x^r & 1 \\ & & & (\hat{\lambda}_m + mr) x^r & \dots \end{bmatrix}$$

Si les λ_i n'ont pas de pôle, on est dans le cas régulier et l'on prend $r = 0$; sinon, en choisissant r satisfaisant aux inégalités qui suivent, on élimine les pôles:

$$-v(\lambda_1) \leq m r, \dots, -v(\lambda_m) \leq r.$$

Pour obtenir une partie principale d'ordre 0 non nilpotente, il faudra alors choisir $r = \sup_l \left(-\frac{v(\lambda_j)}{m-j+1} \right)$; si r est entier, cela va bien, sinon, on pose $r = \frac{q}{q}$, et on fait le changement de variable $x = y^q$ (ce qui ne gêne pas pour démontrer le lemme fondamental); combiné avec la transformation précédente, on arrive finalement à une équation $G \mapsto y^{l+1} \frac{dG}{dy} - qP$, avec $P \in \text{End } (\mathcal{E}^m)$, et $P(0)$ ayant la forme suivante

$$P(0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ d_1 & \dots & d_{m-1} & d_m \end{bmatrix}$$

avec $d_j = \lim_{r \rightarrow 0} \lambda_j(x) x^{jr}$; donc certains d_j sont $\neq 0$; comme l'équation caractéristique de $P(0)$ est $\lambda^m = d_m \lambda^{m-1} + \dots + d_1$, $P(0)$ est non nilpotente.

Observons enfin ceci: si toutes les valeurs propres de $P(0)$ sont confondues, leur somme d_m est $\neq 0$; par suite on a $r = -v(\lambda_m)$, donc r est entier et l'on peut prendre $q = 1$.

Revenons maintenant à la situation générale: à $\hat{D}_1, \dots, \hat{D}_p$ correspondent respectivement des rationnels r_1, \dots, r_p , l'un au moins étant > 0 , (sinon on est dans le cas régulier); on prend alors $r = \sup(r_1, \dots, r_p)$, et on fait simultanément la transformation de Turrittin-Katz avec cette valeur de r sur $\hat{D}_1, \dots, \hat{D}_p$, joint au changement de variable $y = x^q (r = \frac{l}{q})$;

on a alors remplacé D par $D' = y^{l+1} \frac{d}{dy} - \hat{N}$, avec $N = \begin{pmatrix} \hat{N}_1 & 0 \\ 0 & \hat{N}_p \end{pmatrix}$, l'une au moins des matrices $\hat{N}_j(0)$ étant non nilpotente.

On est alors dans le cas B , le cas D_1 ou le cas D_2 ; dans le cas B , le résultat suit par récurrence sur m ; dans le cas D_1 , on diminue $C(D)$; dans

le cas D_2 , d'après la remarque précédente, r est entier, donc le procédé donné en D_2 diminue $i(D)$.

Le lemme (C, i) et donc aussi le lemme fondamental, est ainsi complètement établi.

Remarque. Au lieu de faire une récurrence sur l'irrégularité $i(D)$, il aurait été tout aussi naturel (et même encore plus) d'utiliser a priori « l'irrégularité de Katz », i.e. le nombre r qui vient d'être introduit et qui mesure l'ordre minimum des pôles à considérer (voir à ce sujet Gérard-Levelt [1], et un article à paraître de Levelt).

§ 10. — APPLICATIONS

A. Le théorème 7.1 entraîne le théorème suivant, en apparence plus général:

Théorème 10.1. Soit Φ une fonction de classe \mathcal{C}^∞ des $2m + 1$ variables $x, Y = (y_1, \dots, y_m)$, et $Z = (z_1, \dots, z_m)$ au voisinage de $0, Y^0, Z^0$, à valeurs dans \mathbf{R}^m ; supposons qu'il existe une série formelle $H \in \hat{\mathcal{O}}^m$ (à coefficients réels) vérifiant $H(0) = Y^0, \frac{dH}{dx}(0) = Z^0$, et $\hat{\Phi}(x, H, \frac{dH}{dx}) = 0$; supposons enfin que la matrice $\frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial Z}(x, H(x), \frac{dH}{dx})$ soit inversible sur \hat{K} (i.e. appartienne à $\text{Gl}(m, \hat{K})$); alors, il existe $F \in \mathcal{E}^m$, à valeurs réelles vérifiant $\hat{F} = H, \Phi(x, H, \frac{dH}{dx}) = 0$.

La réduction de ce résultat au cas (7.1) se fait suivant une méthode habituelle dans des questions voisines.

a) On traite d'abord le cas où l'on a $\Phi(x, Y, Z) = \Psi(x, Y)Z - \chi(x, Y)$, Ψ une matrice d'ordre m à coefficients \mathcal{C}^∞ ; pour cela, on se ramène au cas où $H = 0$, donc $Y^0 = Z^0 = 0$; on a alors la situation suivante: $\chi(x, 0)$ est plat, et $\Psi(x, 0)$ est inversible dans $K\mathcal{E}$; il existe donc $M \in \text{End}(\mathcal{E}^m)$ et $k \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait $M\Psi(x, 0) = x^k I$; posons alors $F = x^k G$; on a $M\Psi(x, x^k G) = x^k \Psi_1(x, G)$, avec $\Psi_1(x, 0) = I$, donc $\Psi_1(x, Y)$ inversible au voisinage de $(0, 0)$ dans les matrices à coefficients \mathcal{C}^∞ ; on a aussi $M\chi(x, x^k G) = x^k \chi_1(x, G)$, avec χ_1 de classe \mathcal{C}^∞ ; on est alors ramené à l'équation

$$x^k \frac{d G}{d x} = - k x^{k-1} G + \Psi_1^{-1}(x, G) \chi_1(x, G)$$

b) On ramène le cas général au précédent, par dérivation, en remplaçant l'équation initiale par le système

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d F}{d x} - G = 0 \\ \frac{\partial \Psi}{\partial x}(x, F, G) + \frac{\partial \Psi}{\partial Y}(x, F, G) G + \frac{\partial \Psi}{\partial Z}(x, F, G) \frac{d G}{d x} = 0 \end{array} \right.$$

B. Dans le cas linéaire, on a le théorème suivant

Théorème 10.2. Soit $D = x^k \frac{d F}{d x} - M F$, avec $k \in \mathbf{N}$, $M \in \text{End } (\mathcal{E}^m)$;

soit \mathcal{D}' l'espace des germes de distributions en 0 dans \mathbf{R} ; alors, on a $D \mathcal{D}' = \mathcal{D}'$

Soit $a > 0$, assez petit, et soit I l'intervalle $[-a, a]$; par dualité, il suffit de démontrer que l'application $D' : \mathcal{D}_I^m \rightarrow \mathcal{D}_I^m$ est d'image fermée (\mathcal{D}_I désignant l'espace des fonctions de classe \mathcal{C}^∞ à support dans I); d'après un lemme classique puisque \mathcal{D}_I est un espace de Fréchet, il suffit de démontrer que $D' \mathcal{D}_I^m$ est de codimension finie dans \mathcal{D}_I^m ; soit E l'espace des $F \in \mathcal{C}^\infty(I)^m$ telles qu'on ait $D' F \subset \mathcal{D}_I^m$; d'après le théorème d'existence et d'unicité usuel, \mathcal{D}_I^m est le sous-espace de E formé des F telles qu'on ait $F(-a) = F(a) = 0$, donc \mathcal{D}_I^m est de codimension finie dans E , et il suffit de démontrer que $D' E$ est de codimension finie dans \mathcal{D}_I ; or, le théorème 7.1, joint au théorème usuel de prolongement des solutions d'une équation différentielle montre que $D' E$ est l'ensemble des $F \in \mathcal{D}_I^m$ tels qu'on ait $\hat{F} \in \hat{D}' \hat{\mathcal{O}}^m$; ceci joint au fait que $D' : \hat{\mathcal{O}}^m \rightarrow \hat{\mathcal{O}}^m$ est à indice (proposition 3.6) et à la surjectivité de l'application $\hat{\mathcal{O}}^m \rightarrow \hat{\mathcal{O}}$, entraîne le résultat cherché.

C. Le théorème 7.1 a été démontré indépendamment par Kouznetsov [1] qui en a donné une intéressante application à l'étude des « formes normales » des systèmes différentiels. Disons qu'un système $D = x \frac{d}{d x} - M$, $M \in \text{End } (K \mathcal{E}^m)$ est « élémentaire » si l'on a $M = \sum_{-k}^{-1} \lambda_p x^p I + M_0$, avec $M_0 \in \text{End } (\mathbf{C}^m)$ et $\lambda_p \in \mathbf{C}$; on a alors le résultat suivant:

Théorème 10.3 — (Kouznetsov). Soit $D = x \frac{d}{dx} - M$, $M \in \text{End}(K\mathcal{E}^m)$

un système différentiel. Par un changement de variables $x = y^q$ (q entier ≥ 0) suivi d'une transformation $F = A F_1$, $A \in \text{Gl}(m, K\mathcal{E})$, on peut réduire D à la forme « diagonale »

$$D = \begin{pmatrix} D_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & D_p \end{pmatrix}$$

les D_j étant élémentaires.

Indiquons rapidement comment ce résultat peut se démontrer; tout d'abord, le théorème 7.1 permet de se réduire à démontrer le résultat analogue dans le cas formel, c'est-à-dire dans le cas où l'on remplace dans l'énoncé précédent \mathcal{E} par $\hat{\mathcal{O}}$, et $K\mathcal{E}$ par \hat{K} . Dans ce dernier cas, le résultat dû à Turrittin, peut se démontrer par les mêmes arguments que ceux employés au § 9; d'ailleurs, ici, les choses se simplifient; il suffit d'une double récurrence sur m d'une part, $i(D)$ (ou mieux encore, l'irrégularité de Katz) d'autre part; nous n'entrerons pas dans les détails.

Soit enfin Δ un secteur angulaire fermé de sommet 0 dans \mathbb{C} , de mesure angulaire $\mu(\Delta)$; désignons par $\mathcal{A}(\Delta)$ l'espace des germes en 0 de fonction \mathcal{C}^∞ sur Δ , et holomorphes dans l'intérieur de Δ . D'après Turritin et Wasow, les théorèmes 7.1 et 10.3 sont encore vrais lorsqu'on y remplace \mathcal{E} par $\mathcal{A}(\Delta)$, et $K\mathcal{E}$ par $K \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{A}(\Delta)$ pourvu que $\mu(\Delta)$ soit assez petit (pour le théorème 7.1, il suffit qu'on ait $\mu(\Delta) < \frac{\pi}{k}$); à vrai dire, ces auteurs travaillent avec des « fonctions holomorphes dans un secteur ouvert, admettant un développement asymptotique en 0 », et non avec $\mathcal{A}(\Delta)$, mais le lecteur vérifiera facilement qu'il s'agit là d'une modification inoffensive.

La démonstration, sous ces nouvelles hypothèses, est presque la même que la précédente, et même plus simple: en effet, on démontre directement 8.2 sous l'hypothèse « $\lambda_j \neq 0$ » (voir Wasow [1]); pour établir 7.1, on n'a alors plus besoin de « systèmes standard », et il suffit d'une double récurrence sur $(m, i(D))$. La démonstration ainsi esquissée est d'ailleurs celle que donne Wasow à la simplification près qu'apporte la transformation de Katz. Quant aux énoncés relatifs au développement asymptotique des solutions d'une équation différentielle, ils sont une conséquence facile de cette version du théorème 10.3; nous laissons cette question au lecteur.

BIBLIOGRAPHIE

- DELIGNE, P. [1] *Equations différentielles à points singuliers réguliers*, Lecture Notes in Math., 163, Springer-Verlag 1970.
- DOUADY, A. [1] Le problème des modules pour les sous-espaces analytiques compacts d'un espace analytique donné. *Ann. Inst. Fourier*, 16-1 (1966), pp. 1-95.
- GÉRARD, R. et A. LEVELT. [1] Mesure de l'irrégularité en un point singulier d'un système d'équations différentielles linéaires. *C. R. Acad. Sc., Paris* 274-9 (1972), pp. 774-776.
- KATZ, N. [1] Nilpotent connections and the monodromy theorem; Application of a result of Tjurittin. *Publ. Math. I.H.E.S.* 39 (1970), pp. 176-232.
- KOUZNETSOV, A. N. [1] Differentiable solutions to degenerate systems of ordinary equations (en russe). *Funktional'nyi Analyz* 6(2) (1972), pp. 41-51.
- KOMATSU, H. [1] On the index of differentiable operators. *J. Fac. Sc. Univ. Tokyo IA*, 1. (1971), pp. 379-398.
- MALGRANGE, B. [1] Remarques sur les points singuliers des équations différentielles. *C. R. Acad. Sc., Paris* 273-23 (1971), pp. 1136-1137.
- MANIN, J. I. [1] Moduli fuchsiani. *Ann. Sc. Normale Superiore Pisa* 19(1) (1965), pp. 113-126.
- MOSER, J. [1] The order of a singularity in Fuchs'theory. *Math. Zeitschrift* 72 (1960), pp. 379-398.
- WASOW, W. [1] *Asymptotic expansions for ordinary differential equations*. Interscience Publ. 1965.

(Reçu le 2 juillet 1973)

Bernard Malgrange
Université Scientifique et Médicale de Grenoble
Institut de Mathématiques pures
Boîte postale 116
F-38 Saint-Martin-d'Hères