Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 20 (1974)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: FORMES-VOLUME SUR LES VARIÉTÉS A BORD
Autor: Banyaga, Augustin
Kapitel: 3. Démonstration du théorème
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-46898

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 08.08.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

2. Cas de $\wedge_c^n(\mathbf{R}_+^n)$. On définit I_0 en convenant que $I_0 = 0$. Définissons $\bar{I}_1$. Soit $\alpha = g(x)\,dx$ où g est à support dans $\mathbf{R}_+^n$ et soit $b(x)$ une fonction C^∞, positive ou nulle, à support dans l'intervalle $[1, 2]$ et telle que $\int_0^\infty b(t)\,dt = 1$.

On pose $\bar{\omega} = b(x)\,dx$ et

$$\bar{I}_1(\alpha) = \int_0^x \left(g(t) - b(t) \int \alpha\right) dt\,.$$

On a bien

$$d\bar{I}_1(\alpha) = \alpha - \bar{\omega} \int \alpha\,.$$

Pour $n > 1$, on définit $\bar{I}_n$ par récurrence en posant

$$\bar{I}_n(\alpha) = \bar{I}_{n-1}(\alpha_1) \wedge dx_n + (-1)^{n-1}\,\omega' \left\{\int_{-\infty}^{x_n} \left(\int_{\mathbf{R}^{n-1}} \alpha_1(t) - b(t) \int_{\mathbf{R}_+^n} \alpha\right) dt\right\}$$

où $\omega' = b(x_1)\,b(x_2)\ldots b(x_{n-1})\,dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{n-1}$.

Cet opérateur transforme les formes à support compact, en formes à support compact. On vérifie que $d\bar{I}_n\alpha = \alpha - \bar{\omega}\int\alpha$ et comme avant on remarque que l'on peut prendre ω quelconque à support dans l'intérieur $\mathbf{R}_+^n$ telle que $\int\omega = 1$, et construire $I_n(\alpha) = \bar{I}_n(\alpha) - \bar{I}_n(\omega)\int\alpha$.

Montrons que si $\alpha \in \wedge_c^n(\mathbf{R}_+^n)$ alors $I_n(\alpha)(x) = 0$ pour tout $x \in \partial\mathbf{R}_+^n$. Ceci est vrai pour $n = 0, 1$. Supposons le vrai pour $(n-1)$. La formule définissant I_n montre que

$I_n(\alpha)(x) = I_{n-1}(\alpha_1)(x) \wedge dx^n$ pour tout $x \in \partial\mathbf{R}_+^n$, mais $I_{n-1}(\alpha_1)(x) = 0$ par hypothèse de récurrence.

3. Démonstration du théorème

(ii) implique (iii). Suivant Moser [1], on définit une famille à 1-paramètre de champs de vecteurs u_t en posant

(*) $\quad i(u_t)\,\tau_t + \alpha_t = 0,$

$i(u_t)\,\tau_t$ étant le produit intérieur de τ_t et u_t; c'est la $(n-1)$-forme définie par

$(i(u_t)\,\tau_t)(\xi_1 \ldots \xi_{n-1}) = \tau_t(u_t, \xi_1 \ldots \xi_{n-1})$ pour $n-1$ champs de vecteurs $\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$.

Comme $\alpha_t \,|\, \partial M = 0$ et $\tau_t \neq 0$, on a $u_t \,|\, \partial M = 0$ et l'équation $\frac{d}{dt}(\Phi_t) = u_t$. Φ_t admet une solution Φ_t telle que $\Phi_0 = \mathrm{id}$; $\Phi_t \,|\, \partial M = \mathrm{id}$.

On a: $\frac{d}{dt}(\Phi_t^* \tau_t) = \Phi_t^*\left(\frac{\partial \tau_t}{\partial t} + d\left[i(u_t)\tau_t\right]\right) = 0$

par la condition *(ii)* et l'équation (*) (voir Sternberg [2] et Moser [1].)

(iii) implique (i) trivialement.

(i) implique (ii). Soit $(U_i)_{i=0\ldots m}$ le recouvrement du lemme 1, φ_i les cartes correspondantes; (λ_i) une partition de l'unité subordonnée à (U_i). Posons $\beta_i^t = (\varphi_i^{-1})^* (\lambda_i \dot{\tau}_t)$ avec $\dot{\tau}_t = \partial \tau_t / \partial t$; c'est une n-forme à support compact dans $\mathbf{R}^n$ ou $\mathbf{R}_+^n$.

Soit ω une n-forme à support compact dans $\mathbf{R}_+^n \subset \mathbf{R}^n$ telle que $\int \omega = 1$ et dont le support soit contenu dans l'intérieur de $\mathbf{R}_+^n$.

Alors $\omega_i = (\varphi_i^{-1})^* (\varphi_o^* \omega)$ a un support qui ne rencontre pas $\partial \mathbf{R}_+^n$ et $\int \omega_i = 1$.

D'après le lemme 2, on a

$$d\, I_n^i \beta_i^t = \beta_i^t - \omega_i \int \beta_i^t \text{ dans } \varphi_i(U_i) \subset \mathbf{R}^n$$

où I_n^i est l'opérateur du lemme2 construit à partir de ω_i. Donc

$$\varphi_i^* d\, I_n^i \beta_i^t = \varphi_i^* \beta_i^t - \varphi_i^* \omega_i \int \beta_i^t \text{ dans } U_i,$$
$$d(\varphi_i^* I_n^i \beta_i^t) = \lambda_i \dot{\tau}_t - \bar{\omega} \int \beta_i^t \text{ où } \bar{\omega} = \varphi_o^* \omega;$$

on pose $\alpha_i^t = \varphi_i^* (I_n^i \beta_i^t)$ et $\alpha_t = \sum_i \alpha_i^t$;

on a $\quad d\,\alpha_t = \sum_i \lambda_i \dot{\tau}_t - \bar{\omega} \sum_i \int \beta_i^t = \dot{\tau}_t - \bar{\omega} \int \dot{\tau}_t = \dot{\tau}_t$

par la condition *(i)*.

Comme le support de ω_i ne rencontre pas $\partial \mathbf{R}_+^n$, d'après le lemme 2, on a $(I_n^i \beta_i^t) \mid \partial \mathbf{R}_+^n = 0$, donc α_i^t et par conséquent α^t s'annule sur ∂M.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Moser, J. On volume elements on a manifold, *AMS. Trans. 120* (1965), pp. 280-296.

[2] Sternberg, S. *Lectures on Differential Geometry*, Prentice Hall — Englewood Cliffs, N. J. (1964).

[3] de Rham, G. Forme differenziali et loro-integrali, *C.I.H.E. 2e ciclo, Saltino di Vallombrosa, Agosto 1960, Roma*, p. 21.

[4] Palais, R. Local triviality of the restriction map for imbeddings, *Comm. Math. Helv. 34* (1960), pp. 305-312.

(Reçu le 24 juin 1973)

A. Banyaga
Institut de Mathématiques
2-4, rue du Lièvre
1211 Genève 24