2. Cas de $\bigwedge_c^n(\mathbf{R}_+^n)$. On définit I_0 en convenant que $I_0 = 0$. Définissons $\bar{I}_1$. Soit $\alpha = g(x)\,dx$ où g est à support dans $\mathbf{R}_+^n$ et soit $b(x)$ une fonction C^∞, positive ou nulle, à support dans l'intervalle $[1, 2]$ et telle que $\int_0^\infty b(t)\,dt = 1$.

On pose $\bar{\omega} = b(x)\,dx$ et

$$\bar{I}_1(\alpha) = \int_0^x (g(t) - b(t)\int \alpha)\,dt\,.$$

On a bien

$$d\bar{I}_1(\alpha) = \alpha - \bar{\omega}\int \alpha\,.$$

Pour $n > 1$, on définit $\bar{I}_n$ par récurrence en posant

$$\bar{I}_n(\alpha) = \bar{I}_{n-1}(\alpha_1) \wedge dx_n + (-1)^{n-1}\,\omega'\{\int_{-\infty}^{x_n} (\int_{\mathbf{R}^{n-1}} \alpha_1(t) - b(t)\int_{\mathbf{R}_+^n} \alpha)\,dt\}$$

où $\omega' = b(x_1)\,b(x_2)\ldots b(x_{n-1})\,dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{n-1}$.

Cet opérateur transforme les formes à support compact, en formes à support compact. On vérifie que $d\bar{I}_n\alpha = \alpha - \bar{\omega}\int\alpha$ et comme avant on remarque que l'on peut prendre ω quelconque à support dans l'intérieur $\mathbf{R}_+^n$ telle que $\int\omega = 1$, et construire $I_n(\alpha) = \bar{I}_n(\alpha) - \bar{I}_n(\omega)\int\alpha$.

Montrons que si $\alpha \in \bigwedge_c^n(\mathbf{R}_+^n)$ alors $I_n(\alpha)(x) = 0$ pour tout $x \in \partial\mathbf{R}_+^n$. Ceci est vrai pour $n = 0, 1$. Supposons le vrai pour $(n-1)$. La formule définissant I_n montre que

$I_n(\alpha)(x) = I_{n-1}(\alpha_1)(x) \wedge dx^n$ pour tout $x \in \partial\mathbf{R}_+^n$, mais $I_{n-1}(\alpha_1)(x) = 0$ par hypothèse de récurrence.

3. Démonstration du théorème

(ii) implique (iii). Suivant Moser [1], on définit une famille à 1-paramètre de champs de vecteurs u_t en posant

$$(*)\quad i(u_t)\tau_t + \alpha_t = 0,$$

$i(u_t)\tau_t$ étant le produit intérieur de τ_t et u_t; c'est la $(n-1)$-forme définie par

$(i(u_t)\tau_t)(\xi_1 \ldots \xi_{n-1}) = \tau_t(u_t, \xi_1 \ldots \xi_{n-1})$ pour $n-1$ champs de vecteurs $\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$.

Comme $\alpha_t \mid \partial M = 0$ et $\tau_t \neq 0$, on a $u_t \mid \partial M = 0$ et l'équation $\frac{d}{dt}(\Phi_t) = u_t.\,\Phi_t$ admet une solution Φ_t telle que $\Phi_0 = \mathrm{id}$; $\Phi_t \mid \partial M = \mathrm{id}$.

On a: $\dfrac{d}{dt}(\Phi_t^* \tau_t) = \Phi_t^* \left(\dfrac{\partial \tau_t}{\partial t} + d\left[i(u_t)\tau_t \right] \right) = 0$

par la condition *(ii)* et l'équation (*) (voir Sternberg [2] et Moser [1].)

(iii) implique (i) trivialement.

(i) implique (ii). Soit $(U_i)_{i=0\ldots m}$ le recouvrement du lemme 1, φ_i les cartes correspondantes; (λ_i) une partition de l'unité subordonnée à (U_i). Posons $\beta_i^t = (\varphi_i^{-1}) * (\lambda_i \dot{\tau}_t)$ avec $\dot{\tau}_t = \partial \tau_t / \partial t$; c'est une n-forme à support compact dans $\mathbf{R}^n$ ou $\mathbf{R}_+^n$.

Soit ω une n-forme à support compact dans $\mathbf{R}_+^n \subset \mathbf{R}^n$ telle que $\int \omega = 1$ et dont le support soit contenu dans l'intérieur de $\mathbf{R}_+^n$.

Alors $\omega_i = (\varphi_i^{-1})^* (\varphi_o^* \omega)$ a un support qui ne rencontre pas $\partial \mathbf{R}_+^n$ et $\int \omega_i = 1$.

D'après le lemme 2, on a

$$d I_n^i \beta_i^t = \beta_i^t - \omega_i \int \beta_i^t \text{ dans } \varphi_i(U_i) \subset \mathbf{R}^n$$

où I_n^i est l'opérateur du lemme2 construit à partir de ω_i. Donc

$$\begin{aligned} \varphi_i^* d I_n^i \beta_i^t &= \varphi_i^* \beta_i^t - \varphi_i^* \omega_i \int \beta_i^t \text{ dans } U_i, \\ d(\varphi_i^* I_n^i \beta_i^t) &= \lambda_i \dot{\tau}_t - \bar{\omega} \int \beta_i^t \text{ où } \bar{\omega} = \varphi_o^* \omega; \end{aligned}$$

on pose $\alpha_i^t = \varphi_i^* (I_n^i \beta_i^t)$ et $\alpha_t = \sum_i \alpha_i^t$;

on a $\quad d\alpha_t = \sum_i \lambda_i \dot{\tau}_t - \bar{\omega} \sum_i \int \beta_i^t = \dot{\tau}_t - \bar{\omega} \int \dot{\tau}_t = \dot{\tau}_t$

par la condition *(i)*.

Comme le support de ω_i ne rencontre pas $\partial \mathbf{R}_+^n$, d'après le lemme 2, on a $(I_n^i \beta_i^t) \mid \partial \mathbf{R}_+^n = 0$, donc α_i^t et par conséquent α^t s'annule sur ∂M.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Moser, J. On volume elements on a manifold, *AMS. Trans. 120* (1965), pp. 280-296.
[2] Sternberg, S. *Lectures on Differential Geometry*, Prentice Hall — Englewood Cliffs, N. J. (1964).
[3] de Rham, G. Forme differenziali et loro-integrali, *C.I.H.E. 2e ciclo*, *Saltino di Vallombrosa*, *Agosto 1960*, *Roma*, p. 21.
[4] Palais, R. Local triviality of the restriction map for imbeddings, *Comm. Math. Helv. 34* (1960), pp. 305-312.

(Reçu le 24 juin 1973)

A. Banyaga
Institut de Mathématiques
2-4, rue du Lièvre
1211 Genève 24