§3. — Le théorème d'Euler sur les polyèdres

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **20 (1974)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **28.04.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

solution, tandis que le calcul n'y est pour rien. J'ai donc cru utile d'exposer ici, comme un exemple de géométrie de position, la méthode que j'ai trouvée pour résoudre les problèmes de ce genre.»

Avant de poursuivre, remarquons ceci. D'une façon schématique, on peut répartir les découvertes mathématiques en deux classes:

— Il y a pour commencer celles qui sont autant d'une époque que d'un homme, celles qui s'inscrivent naturellement dans le continuum de la pensée, en bref, celles qui n'auraient pas pu ne pas être. « Lorsqu'il a neigé tout l'hiver durant, la patte d'un lièvre suffit à déclencher l'avalanche.»

— Et puis, il y a les découvertes qui sont accidentelles, qui ne s'inscrivent pas dans le cadre d'un temps, qui font bande à part.

Le problème des ponts, qui est peut-être l'acte de naissance de la topologie, appartient à cette deuxième classe: il n'eut guère d'influence sur le développement de la topologie. Il devait en aller autrement du théorème d'Euler sur les polyèdres.

§ 3. — Le théorème d'Euler sur les polyèdres

3.1 Euler: Lorsqu'on se propose de désigner les lignes polygonales du plan, il faut se rappeler le nombre des côtés qui la limitent. Vers 1750, Euler recherche une classification analogue pour les polyèdres; il remarque que le nombre des sommets peut à ce point différer du nombre des faces, qu'il faut les indiquer tous deux (tétraèdre hexagone, pentaèdre hexagone, etc.). Cette classification n'est pas non plus satisfaisante, et se présente alors naturellement l'idée de faire appel au troisième nombre caractéristique: le nombre des arêtes. Cependant, comme le montre l'examen de quelques cas, ce nombre est déterminé par les deux autres. De cette dernière constatation découle ce qu'il est convenu d'appeler le théorème d'Euler pour les polyèdres, publié en 1752: dans tout polyèdre $\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = 2$ (où α_0, α_1, α_2 représentent respectivement le nombre de sommets, d'arêtes et de faces) [1]).

L'importance de ce théorème pour notre sujet apparaît clairement si l'on songe que l'histoire de la topologie, jusqu'en 1851, se confond, à de rares exceptions près, avec l'histoire du dit théorème. Aussi doit-on s'y arrêter quelque peu.

---

[1] On accorde parfois à Descartes la paternité de ce théorème; j'ai examiné, dans l'ouvrage cité à la page 1, (pp. 8-13) ce qu'il faut penser de cette opinion.

Il faut d'abord observer que l'énoncé d'Euler est trop général; le théorème n'est en effet valable que pour les polyèdres homéomorphes à la sphère. Le nombre $\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2$, qu'on appelle la caractéristique d'Euler, est un invariant topologique, et le théorème d'Euler est une proposition de l'*analysis situs*. Aussi curieux que cela puisse paraître, Euler ne l'a pas remarqué, lui qui avait créé la topologie quelques années plus tôt. Il ne comprit donc pas le véritable intérêt de la proposition, lequel ne pouvait d'ailleurs être mis en évidence que par celui qui montrerait qu'elle n'est pas toujours vraie, comme devait le faire Lhuilier.

La démonstration qu'Euler donne de son théorème n'est pas correcte [1]). Il faut attendre 1794 pour rencontrer la première démonstration satisfaisante, pour les polyèdres convexes. On la doit à Legendre.

3.2 Lhuilier : Simon Lhuilier est né à Genève en 1750. Ses premiers travaux portent sur le problème de l'isopérimétrie dans la pyramide. Son *Exposition élémentaire des principes des calculs supérieurs* remporte en 1786 le grand prix mathématique de l'Académie de Berlin. Après quelques années de préceptorat à Varsovie, il regagne Genève, où il enseigne jusqu'en 1825. Il meurt en 1840.

Dans un mémoire publié en 1813, Lhuilier fait voir que le théorème d'Euler a des exceptions; il les analyse minutieusement. Son principal résultat est que pour un polyèdre percé de n cavités, qui le traversent de part en part, on a $\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = -2(n-1)$. Le nombre n est le genre du polyèdre, qui joue un rôle de premier plan en topologie des surfaces.

3.3 von Staudt : Lhuilier est donc le premier à remarquer que l'énoncé d'Euler souffre de nombreuses exceptions. Il doit cependant se contenter de décrire ce qu'on pourrait nommer, se plaçant dans l'esprit de l'époque, des cas pathologiques, sans être à même de les caractériser par des propriétés géométriques. C'est en 1847 que von Staudt présente enfin le théorème d'Euler avec des hypothèses satisfaisantes: « Lorsque l'on peut joindre chaque sommet d'un polyèdre à tout autre par une ligne formée d'arêtes, et lorsque sa surface est partagée en deux parties, par toute ligne fermée composée d'arêtes, passant au plus une fois par un même sommet, on a... » [2]).

3.4 Schläfli : Ludwig Schläfli est né à Berne en 1814; il enseigne au gymnase de Thoune jusqu'en 1848, puis à l'Université de Berne jusqu'à

---

[1] Voir op. cité (pp. 16-19).

[2] On trouvera la remarquable démonstration de von Staudt dans l'ouvrage cité, p. 28.

sa mort, survenue en 1895. Ludwig Schläfli est l'un des plus grands mathématiciens de son temps, et il faut le placer immédiatement après Euler dans la hiérarchie des mathématiciens suisses. On lui doit de remarquables découvertes dans tous les domaines des mathématiques: à côté de quelques mémoires sur les fonctions elliptiques, la théorie des nombres et la théorie des systèmes d'équations algébriques, il s'est occupé avec brio de la théorie des surfaces du troisième ordre, de la théorie des polyèdres de l'espace à n dimensions; il est le co-inventeur de la loi d'inertie de Sylvester; il a découvert la non-orientabilité du plan projectif, la réduction des matrices orthogonales; en géométrie différentielle, c'est lui qui a trouvé les conditions pour qu'une variété soit à courbure constante (il faut que ses géodésiques apparaissent comme droites dans un certain système de coordonnées). Il s'est intéressé au problème des rapports entre les formes non euclidiennes et l'espace physique, etc. Apprécié à sa juste valeur par tous les grands de la mathématique de son temps, il reçoit en 1870, consécration suprême, le prix Steiner de l'Académie de Berlin [1]. Vers 1850, Schläfli met la dernière main à un manuscrit d'un intérêt considérable. Il décrit lui-même son travail comme « ... visant à fonder et à développer un nouveau rameau de l'analyse, qui soit, en même temps, une géométrie analytique à 2 et 3 dimensions. Comme la géométrie ordinaire peut être nommée théorie d'un continu trois fois étendu, j'ai nommé ma théorie, théorie d'un continu multiplement étendu.» Malheureusement, l'ampleur du mémoire empêche sa publication; il ne voit finalement le jour qu'en 1901, six ans après la mort de son auteur.

Son importance pour notre histoire provient de ce qu'il contient la relation $\sum_{1}^{n-1}(-1)^m \alpha_m + (-1)^n = 1$, qui est la généralisation du théorème d'Euler au cas de l'espace à n dimensions.

§ 4. — Gauss-Listing

Après un siècle d'histoire, le théorème d'Euler a parcouru toutes les étapes réservées à un honnête théorème: apparition empirique, énoncé approximatif, démonstration dans un cas particulier, énoncé exact, généralisation. On doit cependant remarquer que, pendant tout ce siècle consacré au théorème d'Euler, on n'a guère parlé de topologie; ni Euler, ni Legendre,

[1] Voir J. J. Burckhardt, *Ludwig Schläfli*, Birkhaüser, Basel 1948, 23 p.