

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 20 (1974)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** SUR LE PROBLÈME DE KUMMER  
**Autor:** Moreno, Carlos Julio

**Bibliographie**  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-46894>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 19.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

$$\left| \sum_{x=0}^{p-1} e^{\frac{2\pi i x^3}{p}} \right| \geq (1-\varepsilon) p^{\frac{1}{2}}.$$

On doit observer simplement que

$$\sum_{x=0}^{p-1} e^{\frac{2\pi i x^3}{p}} = \tau_p + \bar{\tau}_p = 2 p^{\frac{1}{2}} \cos \theta_p.$$

Cette idée remonte à Hasse [7] (§ 10.8, p. 171) qui l'avait déjà employée dans le cas de la somme de Gauss

$$\sum_{x=0}^{p-1} e^{\frac{2\pi i x^4}{p}}, \quad p \equiv 1 \pmod{4}.$$

5. La solution complète du problème de Kummer sera immédiate si on peut établir que les deux fonctions zêta définies par le produit d'Euler

$$L_v(s) = \prod_{p \equiv 1 \pmod{3}} (1 + \tau_p^v p^{-s})^{-1} (1 + \bar{\tau}_p^v p^{-s})^{-1}, \quad v = 1, 2$$

sont des fonctions holomorphes pour  $Re(s) \geq \frac{3}{2} - \varepsilon$  et  $Re(s) \geq 2 - \varepsilon$  resp. et ne s'annulent pas sur la droite de convergence absolue. Il serait aussi très intéressant de donner une interprétation de caractère 1-adique d'un élément de Frobenius d'expression  $\tau_p + \bar{\tau}_p$ .

Kubota [10], [11] a obtenu des résultats très profonds pour des fonctions analogues à  $L_1(s)$  et  $L_2(s)$  et nous espérons que sa méthode pourrait s'appliquer à notre problème.

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] CASSELS, J. N. S. On kummer sums. *Proc. London Math. Soc.* (3) 21 (1970), 19-27.
- [2] CHOWLA, S. *The Riemann Hypothesis and Hilbert's Tenth Problem*. Gordon and Bleach, New York, 1965.
- [3] DAVENPORT, H. *Multiplicative number Theory*. Markham, Chicago, 1967.
- [4] ——— und H. HASSE. Die Nullstellen der Kongruenzzetafunktionen im gewissen zyklischen Fällen. *J. reine angew. Math.*, 172 (1935), 151-182.
- [5] DEURING, M. Die Zetafunktion einer algebraischen Kurve von Geschlechte Eins. I, *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen*, (1953), 85-94.
- [6] GOLDSTINE, H. and J. von NEUMANN. A numerical study of a conjecture of Kummer. *Math. Tables Aids Comput.* 7 (1953), 133-134.
- [7] HASSE, H. *Vorlesungen über Zahlentheorie*. 1te Aufgabe, Springer, Berlin, 1964.
- [8] HECKE, E. Eine neue Art von Zetafunktionen und ihre Beziehungen zur Verteilung der Primzahlen. I, II, *Math. Zeitschr.*, 1 (1918), 357-376; 6 (1920), 11-51.
- [9] HILBERT, D. Die Theorie der algebraischen Zahlkörper. *Jahresbericht D. Math. Ver.* Bd. 4 (1897), 175-546.

- [10] KUBOTA, T. On a special kind of Dirichlet series. *Journ. Math. Soc. Japan*, 20, (1968), 193-207.
- [11] ——— Some results concerning reciprocity law and real automorphic functions. *Proceedings of Symposia in Pure Math. Vol. XX* (1971), 328-394.
- [12] KUMMER, E. Eine Aufgabe betreffend die Theorie der kubischen Reste. *J. reine angew. Math.* 23 (1842), 285-86.
- [13] ——— De residuis cubicis disquisitiones nonnullae analyticae, *J. reine angew. Math.* 32 (1846), 341-59.
- [14] LANG, S. *Algebraic Numbers*. Addison-Wesley, New York, 1964.
- [15] LEHMER, E. On the location of Gauss sums. *Math. Tables Aids Comput.* 10 (1956), 194-202.
- [16] MORENO, C. Kummer sums and elliptic curves. (*à paraître*).
- [17] SERRE, J.-P. *Abelian  $l$ -adic representations and elliptic curves*. Benjamin, New York, 1968.
- [18] SHIMURA, G. and Y. TANIYAMA. Complex multiplication of abelian varieties and its applications to number theory. *Publ. Math. Soc. Japan*, n° 6, 1971.
- [19] WEIL, A. Number of solutions of equations in finite fields. *Bull. Amer. Math. Soc.* 55 (1949), 497-508.
- [20] ——— Jacobi sums as "Größencharactere". *Trans. Amer. Math. Soc.* 73 (1952), 487-495.
- [21] ——— On some exponential sums. *Proc. Nat. Acad. Sc. USA*, t. 34 (1948), 204-207.
- [22] WEYL, H. Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins, *Math. Annalen* 77 (1914), 313-352.

(Recu le 29 mai 1973)

Carlos Julio Moreno  
The Center for Advanced Study  
University of Illinois  
912 West Illinois  
Urbana, IL 61801  
U.S.A.

**Vide-leer-empty**