

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 20 (1974)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LE PROBLÈME DE KUMMER
Autor: Moreno, Carlos Julio
Kapitel: § 2. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-46894>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 13.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

$$W_h = \begin{cases} \frac{1}{2}, & h = 1 \\ \frac{1}{3}, & h = 2 \\ \frac{1}{6}, & h = 3. \end{cases}$$

Un grand nombre des nouveaux calculs par Goldstine et von Neumann [6], Lehmer [15], et Cassels [1] nous ont conduits à douter de la véracité de la conjecture de Kummer; les mêmes calculs semblent aussi indiquer que les angles θ_p sont équirépartis dans l'intervalle $(0, \pi)$ pour la mesure de Lebesgue. Le but de cette note est de donner une démonstration du résultat suivant.

Théorème. Soit χ_I la fonction caractéristique d'un sous-intervalle I de $(0, \pi]$, alors

$$\sum_{\substack{p \leq x \\ p \equiv 1 \pmod{3}}} \chi_I(3\theta_p) = \frac{|I| x}{2 \log x} + o\left(\frac{x}{\log x}\right),$$

où $|I|$ est la mesure de Lebesgue de I .

Remarque. Le Théorème a été énoncé comme une loi de distribution des nombres premiers mais on peut dire simplement que les angles de la troisième puissance de τ_p sont équirépartis dans l'intervalle $(0, \pi]$ pour la mesure de Lebesgue.

§ 2. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME

L'idée de la démonstration a été déjà considérée par Davenport-Hasse [4] et aussi par Weil [21]. Elle consiste à interpréter les sommes de Gauss comme des traces d'opérateurs de Frobenius.

Soit $E = Q(\rho)$ le corps quadratique imaginaire obtenu en adjoignant $\rho = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ à Q et J_E son anneau d'entiers. L'arithmétique de J_E est bien connue et on sait que les nombres premiers dans J_E appartiennent à deux classes selon que la norme est un nombre premier rationnel ou le carré d'un nombre premier rationnel. Dans ce paragraphe, nous décrirons une construction locale des sommes de Gauss. Soit q un nombre premier de J_E , Fq son corps résiduel et $N_{E/Q}(q) = q$ l'ordre de Fq . Il est très facile de voir que $q \equiv 1 \pmod{3}$, ce qui permet de construire un caractère cubique multipli-

catif pour le groupe cyclique $F^* \mathfrak{q} = F\mathfrak{q} - (0)$ en prenant la racine de l'unité $\chi\mathfrak{q}$ dans J_E qui satisfait à la congruence

$$\chi\mathfrak{q}(x) \equiv x^{\frac{q-1}{3}} \pmod{\mathfrak{q}}.$$

Pour $x \equiv 0 \pmod{\mathfrak{q}}$ nous posons $\chi\mathfrak{q}(x) = 0$. Soit $\psi(x)$ un caractère additif du groupe $F\mathfrak{q}$ distinct de l'unité. La somme de Gauss attachée au nombre premier \mathfrak{q} est définie par

$$g(\chi\mathfrak{q}, \psi) = \sum_x \chi\mathfrak{q}(x) \psi(x),$$

où x décrit le corps résiduel $F\mathfrak{q}$. Le changement de x en $t x$, où $t \in F^* \mathfrak{q}$, donne

$$g(\chi\mathfrak{q}, \psi) = \chi\mathfrak{q}(t) \sum_x \chi\mathfrak{q}(x) \psi(xt),$$

ce qui prouve que le changement du caractère additif ψ en un autre dans la définition de la somme de Gauss ne fait que multiplier celle-ci par un facteur connu. Il en résulte que $g(\chi\mathfrak{q}, \psi)^3$ ne dépend que du nombre premier \mathfrak{q} .

Les propriétés suivantes des sommes de Gauss sont immédiates.

A') $|g(\chi\mathfrak{q}, \psi)|^2 = N_{E/Q}(\mathfrak{q})$.

C) Si \mathfrak{g} est de degré 1 et $\psi(k) = e^{\frac{2\pi i k}{p}}$, où $p = N_{E/Q}(\mathfrak{g})$ il en résulte que la somme $g(\chi\mathfrak{q}, \psi)$ coïncide avec la somme τ_p définie par (1) pour un choix du générateur g de $(Z/pZ)^*$ bien déterminé.

D) Le symbole local

$$\kappa\mathfrak{q} = g(\chi\mathfrak{q}, \psi)^3$$

ne dépend que de \mathfrak{q} .

Pour définir le symbole de Kummer global nous considérons l'ensemble des entiers $I_E(2(1-\rho)^2)$ qui sont premiers avec $2(1-\rho)^2$, et pour chaque $\alpha \in I_E(2(1-\rho)^2)$ nous posons

$$\kappa(\alpha) = \frac{\prod_{\substack{\mathfrak{q} \mid \alpha \\ (-\kappa\mathfrak{q})^{ord \mathfrak{q}(\alpha)}}} \mathfrak{q}}{N_{E/Q}(\alpha)^{\frac{3}{2}}}.$$

On a pour le symbole de Kummer $\kappa(\alpha)$ le résultat suivant.

Théorème (Deuring-Shimura-Weil). *Le symbole de Kummer $\kappa(\alpha)$ est un « Grössencharakter ».*

Pour la démonstration de ce résultat important nous renvoyons aux mémoires de Weil ([20] pp. 489-491), Shimura-Taniyama ([18] pp. 144-148: Main Theorem 4) et Deuring ([5]). Voir aussi notre mémoire ([16] § 3: Generalized Gauss sums as characters) où nous donnons une démonstration valable pour le cas d'une somme de Gauss générale.

Du fait que le symbole $\kappa(\mathfrak{a})$ est un Grössencharakter on peut construire les fonctions

$$L(s, \kappa^v) = \sum' \kappa^v(\mathfrak{a}) N(\mathfrak{a})^{-s} = \prod' (1 - \kappa^v(\mathfrak{q}) N(\mathfrak{q})^{-s})^{-1},$$

où \mathfrak{a} (resp. \mathfrak{q}) sont des entiers (resp. nombres premiers) dans $I_E(2(1-\rho)^2)$ et v un entier rationnel ≥ 1 . La théorie de Hecke [8] nous donne que

$$L(1 + it, \kappa^v) \neq 0$$

pout tous $-\infty \leq t \leq \infty$ et $v \in \mathbb{Z}^+$. Alors un raisonnement du type Taubérien nous donne (voir Hecke [8], Serre [17] et Lang [14])

$$\sum_{N(\mathfrak{q}) \leq x} \kappa_{\mathfrak{q}}^v = o\left(\frac{x}{\log x}\right).$$

Mais nous savons que

$$\sum_{\substack{N(\mathfrak{q}) \leq x \\ \deg \mathfrak{q} = 2}} \kappa_{\mathfrak{q}}^v = o(x^{\frac{1}{2}} (\log x)^2);$$

il en résulte, selon le critère de Weyl [22], que les angles $\theta_{\mathfrak{q}}$ de $\kappa_{\mathfrak{q}} = e^{i\theta_{\mathfrak{q}}}$ pour les nombres premiers \mathfrak{q} de degré 1 sont équirépartis dans le cercle $R/2\pi\mathbb{Z}$ pour la mesure de Lebesgue. Pour vérifier notre Théorème il reste à observer que pour chaque nombre premier \mathfrak{q} in $I_E(2(1-\rho)^2)$ de degré 1 on a par conjugaison un autre nombre premier $\bar{\mathfrak{q}}$ aussi de degré 1 avec la propriété

$$\bar{\kappa}_{\mathfrak{q}} = \kappa_{\bar{\mathfrak{q}}}.$$

Finalement nous faisons usage de l'égalité

$$\kappa_{\mathfrak{q}} = p^{-\frac{3}{2}} \tau_p^3,$$

où $p = N_{E/Q}(\mathfrak{q})$, ou ce qui est la même chose

$$N_{E/Q}(\mathfrak{q})^{\frac{3}{2}} e^{i\theta_{\mathfrak{q}}} = p^{\frac{3}{2}} e^{i3\theta_p}.$$

Cela démontre la proposition.