

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 20 (1974)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: BEGRÜNDUNG DER EULERSCHEN CHARAKTERISTIK INNERHALB DER EBENEN ELEMENTARGEOMETRIE
Autor: Hadwiger, H.
Kapitel: 1. Allgemeiner Teil
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-46893>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 13.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

BEGRÜNDUNG DER EULERSCHEN CHARAKTERISTIK INNERHALB DER EBENEN ELEMENTARGEOMETRIE ¹

von H. HADWIGER

Im ersten allgemeinen Teil wird gezeigt, wie sich ein Miteinbezug der Eulerschen Charakteristik innerhalb einer Elementargeometrie im Rahmen der Schulmathematik vom höheren Standpunkt aus rechtfertigen lässt. Die sachliche Motivation ist vor allem durch den Hauptsatz gegeben, der ohne Beweis erläutert wird, der erkennbar macht, dass die drei Masszahlen, Flächeninhalt, Umfang und Charakteristik zusammengehören. Diese bilden eine Basis im linearen Raum der additiven und invarianten Funktionen ebener Figuren.

Im zweiten speziellen Teil wird eine elementare Begründung, also Existenz- und Eindeutigkeitsnachweis, für die Eulersche Charakteristik als Funktion über dem Verband der Polygone der Ebene gegeben.

1. ALLGEMEINER TEIL

1.1 POLYGONVERBAND

E bezeichne die euklidische Ebene. Eine kompakte Punktmenge $I \subset E$ heisst *polygonale Linie*, wenn I eine disjunkte Zerlegung \mathfrak{Z} in endlich viele Punkte, genannt Eckpunkte, und in endlich viele eigentliche offene Strecken, genannt Kanten, so gestattet, dass die Endpunkte aller Kanten der Eckpunktmenge angehören. Die leere Menge \emptyset ist eine polygonale Linie. Eine polygonale Linie erlaubt beliebig viele derartige Zerlegungen. Man beachte, dass I eine Punktmenge, (I, \mathfrak{Z}) ein ebener, endlicher, schlichter und geradliniger Graph ist. — Eine kompakte Punktmenge $A \subset E$ heisst *Polygon*, wenn der Rand δA eine polygonale Linie ist. Die Eckpunkte bezüglich einer Zerlegung \mathfrak{Z} von δA sind die Eckpunkte, die Kanten die Randstrecken von A . Der offene Kern $\text{int } A$, die Randstrecken und die

¹ Referat an der vom Mathematischen Institut der Universität Bern und der Zentralstelle für Lehrerfortbildung des Kantons Bern veranstalteten Tagung „Geometrieunterricht auf neuer Basis“ am 7. März 1973 im Institut für exakte Wissenschaften.

Eckpunkte repräsentieren eine von \mathfrak{P} abhängige disjunkte Zerlegung des Polygons A . — Eine Randstrecke S von A heisst einseitig, wenn $S \cap \text{cl int } A = S$, zweiseitig wenn $S \cap \text{cl int } A = \emptyset$ ausfällt. \mathfrak{P} bezeichne die Klasse aller Polygone der Ebene E , wobei noch $\emptyset \in \mathfrak{P}$ gelten soll. Es gilt der wichtige Tatbestand

$$(1.1) \quad A, B \in \mathfrak{P} \Rightarrow A \cup B, A \cap B \in \mathfrak{P},$$

wonach \mathfrak{P} bezüglich der Bund- und Schnittbildung geschlossen ist. Struktur-mässig ist $\langle \mathfrak{P}, \cup, \cap \rangle$ ein distributiver Verband, so dass wir mit kurzer Andeutung dieses mit (1.1) verbundenen Sachverhalts \mathfrak{P} auch *Polygonverband* nennen. — Ein konvexes Polygon ist ein *Eipolygon* und $\mathfrak{R} \subset \mathfrak{P}$ soll die Unterklasse aller Eipolygone anzeigen. — Ein Polygon C heisst im Sinne der Elementargeometrie (kurz iSE) in die Polygone A, B zerlegt, symbolisch durch $C = A \oplus B$ angeschrieben, wenn $C = A \cup B$ und $\text{int } (A \cap B) = \emptyset$ ist. Ist C iSE in A, B zerlegt, so ist $A \cap B$ eine polygonale Linie. Jedes Polygon $A \in \mathfrak{P}$ lässt sich iSE in endlich viele Eipolygone $A_i \in \mathfrak{R}$ ($i = 1, \dots, n$) zerlegen, symbolisch $A = \Sigma_i^n A_i$. Eine kompakte Punktmenge $A \subset E$ ist genau dann ein Polygon, wenn sie sich als Vereinigung endlich vieler Eipolygone $A_i \in \mathfrak{R}$ ($i = 1, \dots, n$) darstellen lässt, so dass $A = \cup_i^n A_i$ gilt. Der Polygonverband \mathfrak{P} ist demnach auch deutbar als der von den Elementen von \mathfrak{R} erzeugte Konvexring.

1.2 ADDITIVE FUNKTIONALE

Es bezeichne φ eine reellwertige Funktion $\varphi: \mathfrak{P} \rightarrow \mathbf{R}$ die jedem Polygon $A \in \mathfrak{P}$ den Wert $\varphi(A)$ zuordnet. Generell wird die Nullkonvention $\varphi(\emptyset) = 0$ getroffen. Wir stellen ein der Verbandstruktur von \mathfrak{P} angepasstes Additionstheorem ins Zentrum der zu entwickelnden Theorie. Ein *Polygonfunktional* φ heisst *additiv*, wenn die Beziehung

$$(1.2) \quad A, B \in \mathfrak{P} \Rightarrow \varphi(A) + \varphi(B) = \varphi(A \cup B) + \varphi(A \cap B)$$

uneingeschränkt gilt. Von dieser Additivität ausgehend lässt sich in einheitlicher Weise eine axiomatische Begründung der drei über dem Polygonverband \mathfrak{P} definierten fundamentalen Masszahlen gewinnen, wovon zwei im Rahmen der schulmässigen Elementargeometrie der Ebene wohlbekannt, die dritte aber bisher kaum erwähnt oder gar in den Geometrieunterricht der Mittelschule miteinbezogen werden konnte. Es handelt sich um die drei additiven Funktionale, die mit dem *Flächeninhalt* $F(A)$, der *Randlänge* (Umfang) $L(A)$ und durch die *Eulersche Charakteristik* $\chi(A)$ für Polygone

$A \in \mathfrak{P}$ gegeben sind. Es ist das Hauptziel dieser Ausführungen, die elementare Begründbarkeit der Eulerschen Charakteristik χ nachzuweisen, und erkennbar zu machen, dass alle drei Funktionen F , L und χ , vom passenden höheren Standpunkt aus betrachtet, zusammengehören. In geeigneter Sicht lassen sie sich als die bis auf unwesentliche Normierung einzigen vernünftigen additiven invarianten Polygonfunktionale gewinnen. Das einfachste Unterscheidungsmerkmal ist ihr Homogenitätsgrad. Ist $\lambda > 0$ und zeigt λA das aus A vermöge Dilatation mit λ aus A hervorgehende Polygon an, so heisst φ *homogen vom Grade k* , wenn $\varphi(\lambda A) = \lambda^k \varphi(A)$ gilt. Es sind nur die Grade $k = 0, 1, 2$ möglich, die den Funktionen χ , L , F zukommen.

1.3 HAUPTKLASSE

Um eine sich schliessende Theorie additiver Polygonfunktionen aufbauen zu können, müssen zum Additionstheorem (1.2) noch zwei weitere Bedingungen hinzutreten, die einerseits die wichtige, aber fast selbstverständliche Invarianz garantieren, andererseits unerwünschte pathologische Funktionen auszuschliessen vermögen. Ein Polygonfunktional φ heisst *bewegungsinvariant*, wenn die Aussage

$$(1.3) \quad A, B \in \mathfrak{P}, A \simeq B \Rightarrow \varphi(A) = \varphi(B)$$

gilt, wo die Aequivalenzbeziehung \simeq die Kongruenz von Figuren in E anzeigt.

Ferner nennen wir φ *bedingt beschränkt*, wenn

$$(1.4) \quad A, C \in \mathfrak{R}, A \subset C \Rightarrow |\varphi(A)| \leq \omega(C)$$

gilt, so dass sich also eine nur vom Eipolygon C abhängige reelle Konstante $\omega(C)$ so angeben lässt, dass für jedes in der Rahmenfigur C enthaltene weitere Eipolygon A die angegebene Einschränkung besteht. Man beachte, dass beispielsweise für die Randlänge L eine solche Beschränktheit lediglich bei Restriktion von \mathfrak{P} auf \mathfrak{R} gültig ist, so dass L bedingt beschränkt, nicht aber beschränkt ist.

Die *Hauptklasse* \mathfrak{H} sei die Menge aller additiven, bewegungsinvarianten und bedingt beschränkten Polygonfunktionale.

Die drei kennzeichnenden Forderungen sind so gewählt, dass sich ihr Erfülltsein von zwei Funktionalen φ , ψ offensichtlich auf eine Linearkombination $\alpha \varphi + \beta \psi$ mit reellen Koeffizienten überträgt. Die Hauptklasse $\mathfrak{H} := \{\varphi; (1.2), (1.3), (1.4)\}$ ist ein Vektorraum über \mathbf{R} .

1.4 HAUPTSATZ

Die Hauptklasse \mathfrak{H} verdient im Zusammenhang mit den drei fundamentalen Masszahlen χ, L, F ganz besonderes Interesse dadurch, dass der folgende *Hauptsatz* gilt:

Ist $\varphi \in \mathfrak{H}$ ein additives, bewegungsinvariantes und bedingt beschränktes Polygonfunktional, so lassen sich drei reelle Konstanten α, β, γ so angeben, dass über dem Polygonverband \mathfrak{P} die Identität

$$(1.5) \quad \varphi(A) = \alpha\chi(A) + \beta L(A) + \gamma F(A)$$

besteht.

Die drei Funktionen χ, L, F bilden also eine Basis des Vektorraumes \mathfrak{H} und es gilt $\dim \mathfrak{H} = 3$.

Es genügen die drei Eigenschaften (1.2), (1.3), (1.4) eines Funktionals φ , um den Schluss ziehen zu können, dass eine Darstellung (1, 5) gültig ist, wonach φ durch die drei fundamentalen Masszahlen ausdrückbar wird.

2. SPEZIELLER TEIL

2.1 KENNZEICHNUNG EINER CHARAKTERISTIK

Unter einer *Charakteristik* für Polygone verstehen wir eine Funktion $\chi: \mathfrak{P} \rightarrow \mathbf{R}$, welche die nachfolgenden drei Forderungen erfüllt:

$$(2.1) \quad \chi(\phi) = 0;$$

$$(2.2) \quad A \in \mathfrak{R}, A \neq \phi \Rightarrow \chi(A) = 1;$$

$$(2.3) \quad A, B \in \mathfrak{P} \Rightarrow \chi(A) + \chi(B) = \chi(A \cup B) + \chi(A \cap B).$$

Eine Charakteristik ist demnach ein über dem Polygonverband definiertes additives Funktional, das der Nullkonvention entspricht und so normiert ist, dass jedem nichtleeren Eipolygon der Wert 1 zugeordnet wird.

Mit der Additivität und Berücksichtigung der Sachlage, wonach jedes Polygon als Vereinigung endlich vieler Eipolygone dargestellt werden kann, folgt unmittelbar, dass χ ganzwertig ist, so dass also χ eine Funktion $\chi: \mathfrak{P} \rightarrow \mathbf{Z}$ darstellt. Es ist keineswegs selbstverständlich, dass eine derartige Charakteristik, welche die drei aufgestellten Axiome (2.1), (2.2), (2.3) befriedigt, existiert. Nachfolgend zeigen wir, dass dies in der Tat der Fall ist.