

<b>Zeitschrift:</b>	L'Enseignement Mathématique
<b>Herausgeber:</b>	Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
<b>Band:</b>	20 (1974)
<b>Heft:</b>	3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE
<b>Artikel:</b>	CONSTRUCTION EXPLICITE DE CERTAINES IMMERSIONS DE CODIMENSION 0 OU 1
<b>Autor:</b>	Gramain, André
<b>DOI:</b>	<a href="https://doi.org/10.5169/seals-46915">https://doi.org/10.5169/seals-46915</a>

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 26.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# CONSTRUCTION EXPLICITE DE CERTAINES IMMERSIONS DE CODIMENSION 0 OU 1

par André GRAMAIN

Soient  $V$  une variété différentiable compacte (avec ou sans bord) et  $M$  une variété différentiable. Notons  $\text{Imm}(V, M)$  l'espace des immersions de  $V$  dans  $M$  (muni de la topologie de la  $C^r$ -convergence,  $r \geq 1$ ) et  $R(T(V), T(M))$  l'espace des applications fibrées et injectives dans chaque fibre du fibré tangent  $T(V)$  dans le fibré tangent  $T(M)$  (muni de la topologie de la  $C^{r-1}$ -convergence compacte). Soit enfin  $T : \text{Imm}(V, M) \rightarrow R(T(V), T(M))$  l'application de dérivation. D'après les travaux de S. Smale et M. Hirsch [2], on a :

THÉORÈME. — *Si  $\dim(V) < \dim(M)$ , ou bien si  $V$  est une variété connexe à bord non vide et  $\dim(V) = \dim(M)$ , l'application*

$$T : \text{Imm}(V, M) \rightarrow R(T(V), T(M))$$

*est une équivalence d'homotopie faible. En particulier, elle induit une bijection entre les composantes connexes.*

Ce théorème assure l'existence de certaines immersions. Ainsi, soit  $W'$  une variété parallélisable connexe compacte de dimension  $n + 1$ ; soit  $W$  la variété à bord obtenue en ôtant à  $W'$  l'intérieur d'un  $(n+1)$ -disque plongé. Alors, d'après le théorème, il existe une immersion (étalement) de  $W$  dans  $\mathbf{R}^{n+1}$ . Le but de cette note est de construire explicitement un tel étalement lorsque  $W' = (S_1)^{n+1}$ .

## 1. La construction.

Soit  $V'$  une variété compacte connexe orientée de dimension  $n$  et soit  $\varphi : D_n \rightarrow V'$  un plongement. Le complémentaire  $V$  de  $\varphi(\text{int}(D_n))$  est une variété à bord et  $\varphi$  induit un isomorphisme (changeant l'orientation) de  $S_{n-1}$  sur  $bV$ . Supposons données :

- une immersion  $f : V \rightarrow \mathbf{R}^n$ ,
- une homotopie régulière  $F : I \times S_{n-1} \rightarrow \mathbf{R}^n$  entre  $f \circ \varphi | S_{n-1}$  et le plongement canonique  $p : S_{n-1} \rightarrow \mathbf{R}^n$ .

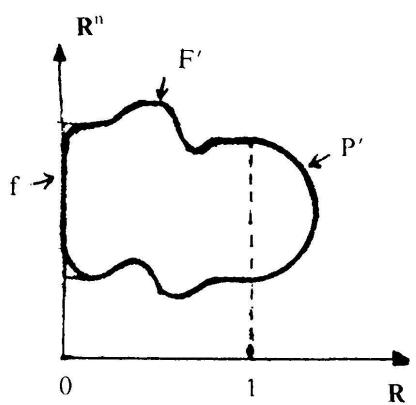


Fig. 1: Première étape

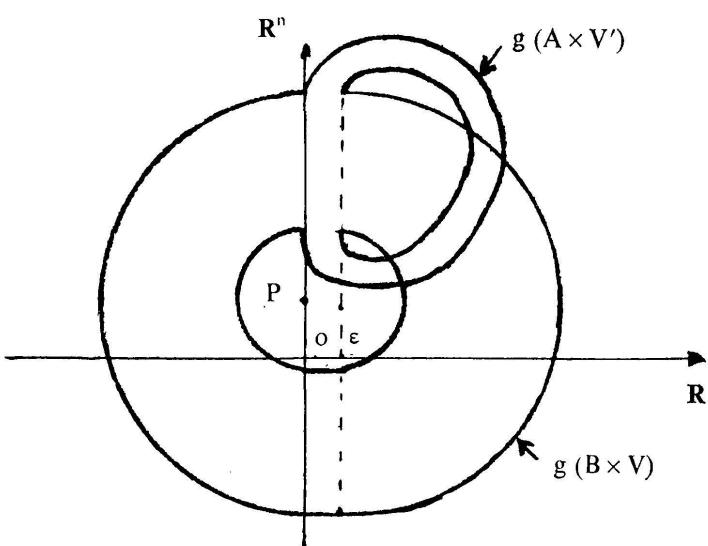


Fig. 2: Deuxième étape

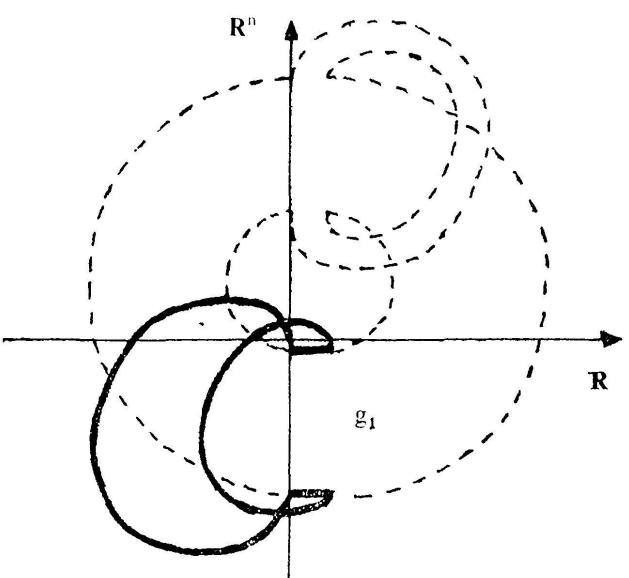


Fig. 3: Troisième étape

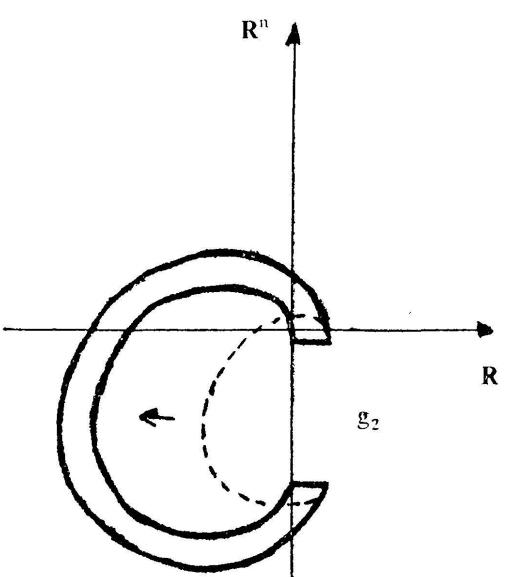


Fig. 4:  $(S_1)^{n+1}$

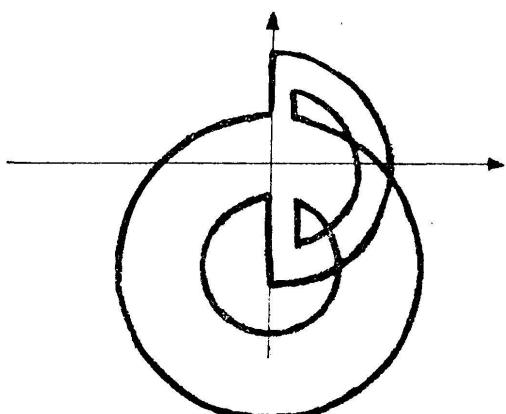


Fig. 5:  $S_1 \times S_n$

Soit  $W' = S_1 \times V'$  et soit  $W$  le complémentaire de l'intérieur d'un disque plongé  $\psi : D_{n+1} \rightarrow W'$ . On va construire :

- (a') une immersion  $g : W \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ ,
- (b') une homotopie régulière  $G : I \times S_n \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$  entre  $g \circ \psi | S_n$  et le plongement canonique  $p : S_n \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ .

La construction se fait en plusieurs étapes.

*Première étape.* Etant données  $V$ ,  $f$  et  $F$  comme ci-dessus, construisons une immersion  $f' : V' \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$  telle que  $f'(V) \subset \{0\} \times \mathbf{R}^n$ .

Supposons d'abord que l'homotopie régulière  $F$  est constante au voisinage de 0 et de 1. L'application  $F' : I \times S_{n-1} \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$  définie par  $F'(t, x) = (t, F(t, x))$  est une immersion qui, pour  $t = 0$  (resp.  $t = 1$ ) est orthogonale à  $\{0\} \times \mathbf{R}^n$  (resp.  $\{1\} \times \mathbf{R}^n$ ). Soit, d'autre part,  $p' : D_n \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$  un plongement tel que  $p' | S_{n-1}$  s'identifie à l'application  $(1, p) : S_{n-1} \rightarrow \{1\} \times \mathbf{R}^n$  et qui soit orthogonal à cet hyperplan et dans le demi-espace  $[1, \rightarrow] \times \mathbf{R}^n$  au voisinage de  $S_{n-1}$ . Les applications  $p'$  (du disque) et  $F'$  (de la couronne) se recollent pour donner une immersion de  $D_n$  dans  $\mathbf{R}^{n+1}$ . Cette immersion et  $f$  se recollent pour donner une application continue  $V' \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ . En arrondissant l'arête  $bV$ , on obtient l'immersion  $f'$  (fig. 1).

*Deuxième étape.* Etant donnée une immersion  $f' : V' \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$  telle que  $f'(V) \subset \{0\} \times \mathbf{R}^n$ , on va construire dans la deuxième étape l'immersion  $g : W \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$  et, dans la troisième étape, l'homotopie régulière  $G$ .

Soient  $A$  et  $B$  les arcs  $[0, \pi]$  et  $[\pi, 2\pi]$  de  $S_1$ . Prenons pour  $W$  la réunion de  $A \times V'$  et  $B \times V$ . Soit  $N : V' \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$  le champ des vecteurs normaux orientés de longueur 1 de l'immersion  $f'$ . Il existe un nombre réel  $\varepsilon > 0$  tel que l'application  $k : [-1, 1] \times V' \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$  définie par  $k(t, x) = f'(x) + \varepsilon t N(x)$  soit une immersion. Fixons  $\varepsilon$  pour que cette condition soit réalisée et prenons pour  $g | A \times V'$  l'application  $(\pi t, x) \rightarrow k(t, x)$ . Considérons d'autre part une immersion  $h : S_1 \times V \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$  obtenue à partir de  $f$  par rotation autour d'un  $(n-1)$ -plan  $P$  de  $\{0\} \times \mathbf{R}^n$  qui ne rencontre pas  $f(V)$ . On modifie  $h$  pour qu'elle se recolle à  $g | A \times V'$  en insérant deux petits cylindres  $[0, \varepsilon] \times V$  et en modifiant le paramétrage par un difféomorphisme convenable de  $S_1$  (fig. 2). On n'a plus qu'à arrondir les arêtes de  $bW$ . Bien qu'on ne l'ait pas fait, il est clair que la construction peut être entièrement explicitée.

*Troisième étape.* Prenons  $[0, 1] \times D_n$  comme modèle de  $D_{n+1}$ . Soit  $\psi : D_{n+1} \rightarrow W'$  l'application définie par  $\psi(t, x) = ((1+t)\pi, \varphi(x)) \in S_1 \times V'$ . Il est clair que c'est un plongement et que  $W = W' - \psi(\text{int}(D_{n+1}))$ .

On veut construire une homotopie régulière de  $g \circ \psi | S_n$  au plongement canonique.

Cette homotopie régulière commence par rétracter le cylindre  $g(B \times bV)$  le long de la rotation qui a servi à définir  $g$ . Notons  $r$  la rotation d'angle  $\pi$  autour de  $P$  et  $\mathbf{i}$  le vecteur  $(1, 0)$  de  $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ . L'extrémité de l'homotopie régulière est l'immersion  $g_1 : S_n \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$  ainsi définie :

$$\begin{aligned} g_1(1, x) &= r \circ f \circ \varphi(x), & \text{pour } (1, x) \in \{1\} \times D_n, \\ g_1(t, x) &= r \circ f \circ \varphi(x) + \varepsilon(1-t)\mathbf{i}, & \text{pour } (t, x) \in I \times S_{n-1}, \\ g_1(0, x) &= r(f \circ \varphi(x) + \varepsilon N(\varphi(x))) + 2\varepsilon\mathbf{i}, & \text{pour } (0, x) \in \{0\} \times D_n. \end{aligned}$$

La deuxième partie de l'homotopie régulière consiste à déformer  $g_1$  en l'immersion  $g_2$  définie par :

$$\begin{aligned} &\text{sur } \{1\} \times D_n \text{ et } I \times S_{n-1}, g_1 \text{ et } g_2 \text{ coïncident,} \\ &\text{pour } (0, x) \in \{0\} \times D_n, \text{ on a } g_2(0, x) = r(f \circ \varphi(x) - \varepsilon N(\varphi(x))). \end{aligned}$$

L'application  $g_2$  est bien définie puisque  $N(x) = \mathbf{i}$  pour  $x \in V$ . C'est une immersion d'après l'hypothèse sur  $\varepsilon$ . L'homotopie régulière est la déformation affine de  $g_1$  en  $g_2$ . C'est bien un chemin dans les immersions si l'on a choisi  $\varepsilon$  assez petit.

L'application  $g_2$  se prolonge en l'immersion  $G_2 : D_{n+1} \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$  définie par

$$G_2(t, x) = r(f \circ \varphi(x) + \varepsilon(t-1)N(\varphi(x))).$$

Ce prolongement  $G_2$  permet de construire la troisième partie de l'homotopie régulière qui déforme  $g_2$  en  $p$ .

## 2. Applications.

### Application au tore $(S_1)^{n+1}$ .

En utilisant la construction  $n$  fois, on obtient une immersion (explicite) de  $(S_1)^{n+1}$  trouvé dans  $\mathbf{R}^{n+1}$  et l'homotopie régulière du bord du trou au plongement canonique qui permet de continuer. Le point de départ est un plongement  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbf{R}$  du demi-cercle (identifié à  $[-1, 1]$ ), et une homotopie régulière (évidente) de  $f| \{-1, 1\}$  à l'application  $-f$  restreinte au même sous-espace. On utilise ici le fait que, dans  $\text{Imm}(S_n, \mathbf{R})$ , le plongement canonique et le plongement retourné ont même classe. On peut aussi, pour ce premier pas, appliquer la méthode ci-dessous.

### Application à $W' = S_1 \times S_n$ .

Dans ce cas, on brûle la première étape de la construction. On part directement d'un plongement  $f' : S_n \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$  qui envoie un hémisphère

dans l'hyperplan  $\{0\} \times \mathbf{R}^n$ . La construction donne alors l'immersion  $g : W \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ . Elle donne en plus une homotopie régulière de  $g|_{bW}$  au plongement retourné de  $S_n$  dans  $\mathbf{R}^{n+1}$ ; ceci constitue une démonstration du fait que  $S_1 \times S_n$  est parallélisable (cf. [3]).

*Application à  $W' = S_p \times S_q$ .*

La deuxième étape de la construction s'applique en remplaçant  $S_1$  par  $S_p$ . On obtient ainsi un étalement de  $W = S_p \times S_q - \text{int}(D_{p+q})$  dans  $\mathbf{R}^{p+q}$ . Identifions  $bW$  à  $S_{p+q-1}$  avec son orientation (qui est l'opposée de celle de l'identification  $\psi$ ). Si  $p$  et  $q$  sont pairs, l'immersion  $g|_{bW}$  est de degré 3 d'après le théorème de *curvatura integra*. Sa classe est donc  $-u$  (voir [1], III.4), où  $u$  est la classe du plongement retourné. Au contraire, si  $p$  est impair, la classe de  $g|_{bW}$  est  $u$  (d'après [1], V, prop. 6 et 7). Pour  $p = 1$ , la troisième étape de la construction donne une démonstration élémentaire de ce fait. Si l'on regarde bien, on y utilise une homotopie régulière entre le plongement canonique et le plongement retourné dans  $\text{Imm}(S_o, \mathbf{R})$ . Cette troisième étape ne se généralise pas directement aux entiers impairs  $p > 1$ . Si l'on savait démontrer élémentairement que  $g|_{bW}$  a pour classe  $u$ , on aurait une démonstration élémentaire de la parallélisabilité de  $S_p \times S_q$ ,  $p$  impair ([3]). Pour cela, il suffirait de démontrer que le plongement  $c : S_{p-1} \times S_q \rightarrow \mathbf{R}^{p+q}$  comme bord de  $D_p \times S_q$  est régulièrement homotope au plongement  $c \circ s$ , où  $s : S_{p-1} \times S_q \rightarrow S_{p-1} \times S_q$  est un changement d'orientation sur le premier facteur.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] GRAMAIN, A. Sur les immersions de codimension 1 qui sont des bords. *Ann. Sc. E.N.S.*, 3 (1970), 111-184.
- [2] HIRSCH, M. Immersions of manifolds. *Trans. A.M.S.*, 93 (1959), 242-276.
- [3] KERVAIRE, M. Courbure intégrale généralisée et homotopie. *Math. Annalen*, 79 (1957), 517-558.

André Gramain

Faculté des Sciences  
F-37200 — Tours

(Reçu le 6 décembre 1973)