pour tout i. Nous nous intéressons ici aux représentations indécomposables, c'est-à-dire aux représentations non nulles qui ne sont pas somme directe de 2 sous-représentations non nulles.

Kleiner, Nazarova et Roiter ont pu montrer que le nombre de classes d'isomorphisme de représentations indécomposables était infini si et seulement si $\mathbf{O}$ contenait un sous-ensemble ordonné plein (c'est-à-dire muni de l'ordre induit) de l'un des types suivants:

$\{1, 2, 3, 4\}$ (4 points incomparables deux à deux)

$\{1 < 2, 3 < 4, 5 < 6\}$ (3 couples incomparables d'éléments comparables)

$\{1 < 2 < 3, 4 < 5 < 6, 7\}$

$\{1 < 2 < 3 < 4 < 5, 6 < 7, 8\}$

$\{1 < 2 < 3 < 4, 5 < 6 > 7 < 8\}$.

Cet énoncé joue un rôle essentiel dans leur démonstration des conjectures de Brauer-Thrall, dont nous allons donner le principe.

5. Le conjecture-théorème de Brauer/Thrall-Nazarova/Roiter ([7]).

Soit A une algèbre de dimension finie sur un corps algébriquement clos k. Pour tout entier naturel n, nous posons $v_A(n)$ = nombre de classes d'isomorphisme de A-modules indécomposables de k-dimension n. La conjecture de Brauer-Thrall dit que, *si* $\sum_{n \in \mathbf{N}} v_A(n)$ *est infini, il y a une infinité de n tels que* $v_A(n) = \infty$. En 1968 Roiter a pu fournir un premier élément de réponse à cette conjecture en montrant de manière simple et élégante que si $\sum_{n \in \mathbf{N}} v_A(n)$ est infini, il y a une infinité de n tels que $v_A(n) \neq 0$. Une démonstration complète de la conjecture de Brauer-Thrall n'a été publiée qu'en 1974 par Nazarova et Roiter. La démonstration reste technique et épineuse. Nous en développons seulement le principe:

Raisonnant par récurrence sur la dimension de A, nous pouvons supposer que $\sum_n v_B(n) < \infty$ pour tout vrai quotient B de A, et que $v_A(n) < \infty$ pour presque tout n. Il s'agit alors de montrer que $\sum_n v_A(n) < \infty$.

Pour cela nous choisissons un idéal à gauche minimal S de A et, pour tout A-module M, nous notons $S(M)$ la somme des sous-modules de M isomorphes à S. Dans la suite exacte

$$0 \longrightarrow S(M) \longrightarrow M \longrightarrow M / S(M) \longrightarrow 0$$

$M/S(M)$ est un module sur l'anneau résiduel $A' = A/S(A)$. Si nous fixons la classe d'isomorphisme T de $S(M)$ et la classe M' de $M/S(M)$, nous obtenons ainsi une injection

$$\left\{\begin{array}{l}\text{classes d'iso. de } A\text{-modules } M \text{ telles} \\ \text{que } \; S(M) \xrightarrow{\sim} T \; \text{ et } \; M/s(M) \xrightarrow{\sim} M'\end{array}\right\} \longrightarrow \operatorname{Aut} T \backslash \operatorname{Ext}_A^1(M', T)/\operatorname{Aut} M',$$

où l'ensemble d'arrivée est l'ensemble des orbites du groupe $\operatorname{Aut} T \times (\operatorname{Aut} M')^{op}$ dans le groupe des extensions de T par M'. L'image de l'injection est formée des classes d'extensions E telles que $T \xrightarrow{\sim} S(E)$. On a donc

$$\left\{\begin{array}{l}\text{classes d'iso. de } A\text{-modules } M \text{ telles} \\ \text{que } \; S(M) \xrightarrow{\sim} T \; \text{ et } \; M/S(M) \xrightarrow{\sim} M\end{array}\right\} \xrightarrow{\sim} \operatorname{Aut} T \backslash \operatorname{Ext}_A^1(M', T)/\operatorname{Aut} M'$$

lorsque $S(M') = 0$, ce qui est toujours le cas si $\operatorname{Ext}_A^1(S, S) = 0$.

Pour simplifier nous supposons dans toute la suite du raisonnement que $\operatorname{Ext}_A^1(S, S) = 0$.

Le module semi-simple T peut s'écrire sous la forme $T = S \otimes_k V$, où V est un espace vectoriel de dimension finie. On a alors $\operatorname{Aut} T = \operatorname{Aut} V$ et

$$\begin{aligned}\operatorname{Ext}_A^1(M', T) &= \operatorname{Ext}_A^1(M', S \otimes V) \xleftarrow{\sim} \operatorname{Ext}_A^1(M', S) \otimes_k V \xrightarrow{\sim} \\ &\xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_k\left(V^*, \operatorname{Ext}_A^1(M', S)\right).\end{aligned}$$

Cette dernière formule a l'avantage de bien mettre en évidence l'opération de $\operatorname{Aut} V$. On voit par exemple que deux applications linéaires $f, g \in \operatorname{Hom}_k(V^*, \operatorname{Ext}_A^1(M', S))$ appartiennent à la même orbite de $\operatorname{Aut} V$ si et seulement si $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Im}(g)$.

Pour pouvoir également tenir compte de l'action de $\operatorname{Aut} M'$ Nazarova et Roiter sont amenés à introduire la catégorie « vectorielle » $\mathbf{V}$ qui suit: les objets de $\mathbf{V}$ sont les A'-modules de longueur finie; si M' et M'_1 sont deux tels objets, $\operatorname{Hom}_{\mathbf{V}}(M', M'_1)$ est l'image de $\operatorname{Hom}_{A'}(M'_1, M')$ dans $\operatorname{Hom}_k(E_{M'}, E_{M'_1})$ lorsque l'on pose $E_{M'} = \operatorname{Ext}_A^1(M', S)$.

La catégorie $\mathbf{V}$ est additive, k est contenu dans l'anneau des endomorphismes du foncteur identique, chaque objet de $\mathbf{V}$ est une somme directe finie d'indécomposables, le nombre de classes d'isomorphisme d'indécomposables est fini, et l'anneau des endomorphismes d'un indécomposable est local. En outre, la catégorie **V** est reliée à celle des k-espaces vectoriels de dimension finie par un foncteur k-linéaire fidèle $E : M' \mapsto E_{M'}$. Nous résumerons ces propriétés en disant avec Nazarova et Roiter que le couple $(\mathbf{V}, E)$ est une *catégorie vectorielle.*

Lorsque $(\mathbf{V}, E)$ est une catégorie vectorielle, nous pouvons considérer les couples (M', V) formée d'un objet M' de **V** et d'un sous-espace vectoriel V de $E(M')$. On obtient un tel couple en associant par exemple à tout $f \in \mathrm{Hom}_k(V^*, \mathrm{Ext}^1_A(M', S))$ le sous-espace Imf de $E_{M'} = \mathrm{Ext}^1_A(M', S)$. Ces couples forment eux-mêmes une catégorie additive. Pour tout $M' \in \mathbf{V}$, nous désignons par $v(M')$ le nombre de classes d'isomorphisme de couples indécomposables de la forme (M', V).

La conjecture de Brauer-Thrall résulte alors de l'énoncé suivant de Nazarova et Roiter:

THÉORÈME. *Soit* $(\mathbf{V}, E)$ *une catégorie vectorielle telle que* $v(M') < \infty$ *pour presque tout objet* M' *de* V. *Alors* $\sum_{M' \in \mathbf{V}} v(M') < \infty$.

Pour démontrer ce théorème, Nazarova et Roiter montrent d'abord combien l'hypothèse est draconienne. Elle implique par exemple que $\dim_k E(M') \leqq 3$ pour tout indécomposable $M' \in \mathbf{V}$. Il réduisent ensuite le problème au cas où $\dim_k E(M') \leqq 1$. Dans ce dernier cas on retrouve le problème du paragraphe 4. Soit en effet **O** l'ensemble des classes d'indécomposables de **V**. Pour tout $i \in \mathbf{O}$, soient M_i un représentant de la classe i et $k_i = E(M_i)$. On définit une relation d'ordre sur **O** en posant $i \geqq j$ lorsque $\mathrm{Hom}_{\mathbf{V}}(M_i, M_j) \neq 0$.

A tout couple (M', V) est alors associé une représentation linéaire de **O** d'espace sous-jacent V. Il suffit de poser

$$V(j) = V \cap E(M')(j) \;\; et \;\; E(M')(j) = \sum Im\, E(f),$$

où f parcourt les morphismes $M_i \to M'$ de V tels que $j \nleqq i$. Il reste alors à voir, ce qui est relativement facile, que l'application $(M', V) \mapsto (V(j))_{j \in \mathbf{O}}$ induit une bijection

$$\left\{\begin{array}{l}\text{classes d'isomorphisme}\\ \text{de couples indécompo-}\\ \text{sables } (M', V) \text{ tels que}\\ V \neq 0\end{array}\right\} \xrightarrow{\sim} \left\{\begin{array}{l}\text{classes d'isomorphisme}\\ \text{de représentations liné-}\\ \text{aires indécomposables}\\ \text{de } \mathbf{O}\end{array}\right\}$$