

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 20 (1974)  
**Heft:** 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** PROBLÈMES ACTUELS DE THÉORIE DES REPRÉSENTATIONS  
**Autor:** Gabriel, Pierre  
**Kapitel:** 5. Le conjecture-théorème de Brauer/Thrall-Nazarova/Roiter ([7]).  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-46914>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 16.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

pour tout  $i$ . Nous nous intéressons ici aux représentations indécomposables, c'est-à-dire aux représentations non nulles qui ne sont pas somme directe de 2 sous-représentations non nulles.

Kleiner, Nazarova et Roiter ont pu montrer que le nombre de classes d'isomorphisme de représentations indécomposables était infini si et seulement si  $\mathbf{O}$  contenait un sous-ensemble ordonné plein (c'est-à-dire muni de l'ordre induit) de l'un des types suivants:

- $\{1, 2, 3, 4\}$  (4 points incomparables deux à deux)
- $\{1 < 2, 3 < 4, 5 < 6\}$  (3 couples incomparables d'éléments comparables)
- $\{1 < 2 < 3, 4 < 5 < 6, 7\}$
- $\{1 < 2 < 3 < 4 < 5, 6 < 7, 8\}$
- $\{1 < 2 < 3 < 4, 5 < 6 > 7 < 8\}$ .

Cet énoncé joue un rôle essentiel dans leur démonstration des conjectures de Brauer-Thrall, dont nous allons donner le principe.

## 5. LE CONJECTURE-THÉORÈME DE BRAUER/THRALL-NAZAROVA/ROITER ([7]).

Soit  $A$  une algèbre de dimension finie sur un corps algébriquement clos  $k$ . Pour tout entier naturel  $n$ , nous posons  $v_A(n)$  = nombre de classes d'isomorphisme de  $A$ -modules indécomposables de  $k$ -dimension  $n$ . La conjecture de Brauer-Thrall dit que, si  $\sum_{n \in \mathbf{N}} v_A(n)$  est infini, il y a une infinité de  $n$  tels que  $v_A(n) = \infty$ . En 1968 Roiter a pu fournir un premier élément de réponse à cette conjecture en montrant de manière simple et élégante que si  $\sum_{n \in \mathbf{N}} v_A(n)$  est infini, il y a une infinité de  $n$  tels que  $v_A(n) \neq 0$ . Une démonstration complète de la conjecture de Brauer-Thrall n'a été publiée qu'en 1974 par Nazarova et Roiter. La démonstration reste technique et épineuse. Nous en développons seulement le principe:

Raisonnant par récurrence sur la dimension de  $A$ , nous pouvons supposer que  $\sum_n v_B(n) < \infty$  pour tout vrai quotient  $B$  de  $A$ , et que  $v_A(n) < \infty$  pour presque tout  $n$ . Il s'agit alors de montrer que  $\sum_n v_A(n) < \infty$ .

Pour cela nous choisissons un idéal à gauche minimal  $S$  de  $A$  et, pour tout  $A$ -module  $M$ , nous notons  $S(M)$  la somme des sous-modules de  $M$  isomorphes à  $S$ . Dans la suite exacte

$$0 \longrightarrow S(M) \longrightarrow M \longrightarrow M/S(M) \longrightarrow 0$$

$M/S(M)$  est un module sur l'anneau résiduel  $A' = A/S(A)$ . Si nous fixons la classe d'isomorphisme  $T$  de  $S(M)$  et la classe  $M'$  de  $M/S(M)$ , nous obtenons ainsi une injection

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{classes d'iso. de } A\text{-modules } M \text{ telles} \\ \text{que } S(M) \simeq T \text{ et } M/S(M) \simeq M' \end{array} \right\} \longrightarrow \text{Aut } T \backslash \text{Ext}_A^1(M', T) / \text{Aut } M',$$

où l'ensemble d'arrivée est l'ensemble des orbites du groupe  $\text{Aut } T \times (\text{Aut } M')^{\text{op}}$  dans le groupe des extensions de  $T$  par  $M'$ . L'image de l'injection est formée des classes d'extensions  $E$  telles que  $T \simeq S(E)$ . On a donc

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{classes d'iso. de } A\text{-modules } M \text{ telles} \\ \text{que } S(M) \simeq T \text{ et } M/S(M) \simeq M' \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \text{Aut } T \backslash \text{Ext}_A^1(M', T) / \text{Aut } M'$$

lorsque  $S(M') = 0$ , ce qui est toujours le cas si  $\text{Ext}_A^1(S, S) = 0$ .

*Pour simplifier nous supposons dans toute la suite du raisonnement que*  
 $\text{Ext}_A^1(S, S) = 0$ .

Le module semi-simple  $T$  peut s'écrire sous la forme  $T = S \otimes_k V$ , où  $V$  est un espace vectoriel de dimension finie. On a alors  $\text{Aut } T = \text{Aut } V$  et

$$\begin{aligned} \text{Ext}_A^1(M', T) &= \text{Ext}_A^1(M', S \otimes V) \simeq \text{Ext}_A^1(M', S) \otimes_k V \simeq \\ &\simeq \text{Hom}_k(V^*, \text{Ext}_A^1(M', S)). \end{aligned}$$

Cette dernière formule a l'avantage de bien mettre en évidence l'opération de  $\text{Aut } V$ . On voit par exemple que deux applications linéaires  $f, g \in \text{Hom}_k(V^*, \text{Ext}_A^1(M', S))$  appartiennent à la même orbite de  $\text{Aut } V$  si et seulement si  $\text{Im}(f) = \text{Im}(g)$ .

Pour pouvoir également tenir compte de l'action de  $\text{Aut } M'$  Nazarova et Roiter sont amenés à introduire la catégorie « vectorielle »  $\mathbf{V}$  qui suit: les objets de  $\mathbf{V}$  sont les  $A'$ -modules de longueur finie; si  $M'$  et  $M'_1$  sont deux tels objets,  $\text{Hom}_{\mathbf{V}}(M', M'_1)$  est l'image de  $\text{Hom}_A(M'_1, M')$  dans  $\text{Hom}_k(E_{M'}, E_{M'_1})$  lorsque l'on pose  $E_{M'} = \text{Ext}_A^1(M', S)$ .

La catégorie  $\mathbf{V}$  est additive,  $k$  est contenu dans l'anneau des endomorphismes du foncteur identique, chaque objet de  $\mathbf{V}$  est une somme directe finie d'indécomposables, le nombre de classes d'isomorphisme d'indé-

composables est fini, et l'anneau des endomorphismes d'un indécomposable est local. En outre, la catégorie  $\mathbf{V}$  est reliée à celle des  $k$ -espaces vectoriels de dimension finie par un foncteur  $k$ -linéaire fidèle  $E : M' \mapsto E_{M'}$ . Nous résumerons ces propriétés en disant avec Nazarova et Roiter que le couple  $(\mathbf{V}, E)$  est une *catégorie vectorielle*.

Lorsque  $(\mathbf{V}, E)$  est une catégorie vectorielle, nous pouvons considérer les couples  $(M', V)$  formée d'un objet  $M'$  de  $\mathbf{V}$  et d'un sous-espace vectoriel  $V$  de  $E(M')$ . On obtient un tel couple en associant par exemple à tout  $f \in \text{Hom}_k(V^*, \text{Ext}_A^1(M', S))$  le sous-espace  $\text{Im} f$  de  $E_{M'} = \text{Ext}_A^1(M', S)$ . Ces couples forment eux-mêmes une catégorie additive. Pour tout  $M' \in \mathbf{V}$ , nous désignons par  $v(M')$  le nombre de classes d'isomorphisme de couples indécomposables de la forme  $(M', V)$ .

La conjecture de Brauer-Thrall résulte alors de l'énoncé suivant de Nazarova et Roiter :

**THÉORÈME.** *Soit  $(\mathbf{V}, E)$  une catégorie vectorielle telle que  $v(M') < \infty$  pour presque tout objet  $M'$  de  $\mathbf{V}$ . Alors  $\sum_{M' \in \mathbf{V}} v(M') < \infty$ .*

Pour démontrer ce théorème, Nazarova et Roiter montrent d'abord combien l'hypothèse est draconienne. Elle implique par exemple que  $\dim_k E(M') \leq 3$  pour tout indécomposable  $M' \in \mathbf{V}$ . Il réduisent ensuite le problème au cas où  $\dim_k E(M') \leq 1$ . Dans ce dernier cas on retrouve le problème du paragraphe 4. Soit en effet  $\mathbf{O}$  l'ensemble des classes d'indécomposables de  $\mathbf{V}$ . Pour tout  $i \in \mathbf{O}$ , soient  $M_i$  un représentant de la classe  $i$  et  $k_i = E(M_i)$ . On définit une relation d'ordre sur  $\mathbf{O}$  en posant  $i \geq j$  lorsque  $\text{Hom}_{\mathbf{V}}(M_i, M_j) \neq 0$ .

A tout couple  $(M', V)$  est alors associé une représentation linéaire de  $\mathbf{O}$  d'espace sous-jacent  $V$ . Il suffit de poser

$$V(j) = V \cap E(M')(j) \text{ et } E(M')(j) = \sum \text{Im } E(f),$$

où  $f$  parcourt les morphismes  $M_i \rightarrow M'$  de  $\mathbf{V}$  tels que  $j \leq i$ . Il reste alors à voir, ce qui est relativement facile, que l'application  $(M', V) \mapsto (V(j))_{j \in \mathbf{O}}$  induit une bijection

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{classes d'isomorphisme} \\ \text{de couples indécomposables } (M', V) \text{ tels que} \\ V \neq 0 \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{l} \text{classes d'isomorphisme} \\ \text{de représentations linéaires} \\ \text{indécomposables de } \mathbf{O} \end{array} \right\}$$