Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 20 (1974)

Heft: 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: PROBLÈMES ACTUELS DE THÉORIE DES REPRÉSENTATIONS

Autor: Gabriel, Pierre

Kapitel: 4. Espaces vectoriels munis de sous-espaces. ([4], [6])

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-46914

avec $f^{p^a} = f \circ f \circ \ldots \circ f = 0$. A ces données nous associons un G-module d'espace sous-jacent

$$\bigoplus_{i=0}^{i=r-1} E(\chi^i e) \otimes_k V_i \,.$$

L'opération de K est induite par celles de K sur les modules simples $E(\chi^i e)$. L'opération de $\sigma \in S$ sur les différents facteurs $E(\chi^i e) \otimes_k V_i$ est déterminée si l'on connaît celle de π, qui est elle-même décrite par la figure ci-dessous

$$\begin{tikzcd}
 & E(e)\otimes V_0 \arrow[dr, "u\otimes f = \pi"] & \\
E(\chi^{r-1}e)\otimes V_{r-1} \arrow[ur, "\pi = u\otimes f"] & & E(\chi e)\otimes V_1 \arrow[d, "u\otimes f = \pi"] \\
E(\chi^{r-2}e)\otimes V_{r-2} \arrow[u, "\pi = u\otimes f"] & & E(\chi^2 e)\otimes V_2 \arrow[dl] \\
 & \cdots\cdots \arrow[ul] &
\end{tikzcd}$$

où les $u : {}_{\chi}E(\chi^i e) \xrightarrow{\sim} E(\chi^{i+1}e)$ sont des K-isomorphismes choisis une fois pour toutes.

Le G-module ainsi construit est indécomposable si et seulement si notre couronne d'espaces vectoriels est indécomposable. Ceci a lieu s'il existe un $v \in V_i$ dont les itérés non nuls v, $f(v)$, $f^2(v)$, ... forment une base de $\bigoplus_{j=0}^{r-1} V_j$. On peut montrer qu'on obtient ainsi tous les G-modules indécomposables.

4. Espaces vectoriels munis de sous-espaces. ([4], [6])

Soit $\mathbf{O}$ un ensemble ordonné, Une k-représentation linéaire de $\mathbf{O}$ consiste en la donnée d'un k-espace vectoriel de dimension finie V et d'une famille de sous-espaces $(V(i))_{i \in \mathbf{O}}$ tels que $V(i) \subset V(j)$ si $i \leqq j$. La somme directe de deux représentations V' et V'' a pour espace sous-jacent $V' \oplus V''$ et est telle que

$$(V' \oplus V'')(i) = V'(i) \oplus V''(i)$$

pour tout i. Nous nous intéressons ici aux représentations indécomposables, c'est-à-dire aux représentations non nulles qui ne sont pas somme directe de 2 sous-représentations non nulles.

Kleiner, Nazarova et Roiter ont pu montrer que le nombre de classes d'isomorphisme de représentations indécomposables était infini si et seulement si $\mathbf{O}$ contenait un sous-ensemble ordonné plein (c'est-à-dire muni de l'ordre induit) de l'un des types suivants:

$\{1, 2, 3, 4\}$ (4 points incomparables deux à deux)

$\{1 < 2, 3 < 4, 5 < 6\}$ (3 couples incomparables d'éléments comparables)

$\{1 < 2 < 3, 4 < 5 < 6, 7\}$

$\{1 < 2 < 3 < 4 < 5, 6 < 7, 8\}$

$\{1 < 2 < 3 < 4, 5 < 6 > 7 < 8\}$.

Cet énoncé joue un rôle essentiel dans leur démonstration des conjectures de Brauer-Thrall, dont nous allons donner le principe.

5. Le conjecture-théorème de Brauer/Thrall-Nazarova/Roiter ([7]).

Soit A une algèbre de dimension finie sur un corps algébriquement clos k. Pour tout entier naturel n, nous posons $\nu_A(n)$ = nombre de classes d'isomorphisme de A-modules indécomposables de k-dimension n. La conjecture de Brauer-Thrall dit que, *si* $\sum_{n \in \mathbf{N}} \nu_A(n)$ *est infini, il y a une infinité de n tels que* $\nu_A(n) = \infty$. En 1968 Roiter a pu fournir un premier élément de réponse à cette conjecture en montrant de manière simple et élégante que si $\sum_{n \in \mathbf{N}} \nu_A(n)$ est infini, il y a une infinité de n tels que $\nu_A(n) \neq 0$. Une démonstration complète de la conjecture de Brauer-Thrall n'a été publiée qu'en 1974 par Nazarova et Roiter. La démonstration reste technique et épineuse. Nous en développons seulement le principe:

Raisonnant par récurrence sur la dimension de A, nous pouvons supposer que $\sum_n \nu_B(n) < \infty$ pour tout vrai quotient B de A, et que $\nu_A(n) < \infty$ pour presque tout n. Il s'agit alors de montrer que $\sum_n \nu_A(n) < \infty$.