

<b>Zeitschrift:</b>	L'Enseignement Mathématique
<b>Herausgeber:</b>	Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
<b>Band:</b>	20 (1974)
<b>Heft:</b>	3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE
 <b>Artikel:</b>	PROBLÈMES ACTUELS DE THÉORIE DES REPRÉSENTATIONS
<b>Autor:</b>	Gabriel, Pierre
<b>Kapitel:</b>	3. Représentations modulaires des groupes finis ([3], [5])
<b>DOI:</b>	<a href="https://doi.org/10.5169/seals-46914">https://doi.org/10.5169/seals-46914</a>

### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 19.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

### 3. REPRÉSENTATIONS MODULAIRES DES GROUPES FINIS ([3], [5])

Soient  $k$  un corps algébriquement clos et  $G$  un groupe fini. On sait que l'algèbre  $k[G]$  du groupe  $G$  contient comme base sur  $k$  les éléments de  $G$ , le produit de deux tels éléments dans  $k[G]$  étant le même que dans  $G$ . De plus, toute structure de  $k[G]$ -module sur un espace vectoriel  $V$  est déterminée par la donnée des automorphismes  $v \mapsto g \cdot v$  de  $V$ ,  $g \in G$ ; elle équivaut par conséquent à la donnée d'un homomorphisme de groupes  $G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ , si  $\mathrm{GL}(V)$  désigne comme d'habitude le groupe des automorphismes linéaires de  $V$ .

Lorsque  $k$  est de caractéristique 0, le théorème de Maschke nous dit que tout  $k[G]$ -module est une somme directe de  $k[G]$ -modules simples. Dans ce cas, les modules indécomposables coïncident donc avec les modules simples, c'est-à-dire les modules  $S$  n'ayant pas d'autres sous-modules que 0 ou  $S$ . La détermination explicite de ces modules simples peut soulever des difficultés considérables, mais que nous voulons taire ici ! Du point de vue de la classification des indécomposables, nous considérons notre problème comme résolu si nous pouvons le ramener au problème de la classification des modules simples.

Supposons donc  $k$  de caractéristique  $p > 0$ . On sait que tout groupe fini  $G$  d'ordre  $n = p^a q$ , avec  $q$  premier à  $p$ , contient des sous-groupes  $S$  d'ordre  $p^a$  et que tous ces sous-groupes sont conjugués entre eux; ce sont les sous-groupes de Sylow. Par exemple, si  $G = \mathrm{GL}(m, \mathbf{F}_{p^s})$  est le groupe linéaire d'ordre  $m$  à coefficients dans le corps fini à  $p^s$  éléments, les matrices triangulaires  $(a_{ij})$  telles que  $a_{ii} = 1$  et  $a_{ij} = 0$  pour  $i > j$  forment un  $p$ -sous-groupe de Sylow de  $G$ .

Kasch, Kneser et Kupisch ont pu montrer en 1957 que le nombre des classes d'isomorphisme de  $k[G]$ -modules indécomposables est fini si et seulement si les  $p$ -sous-groupes de Sylow de  $G$  sont cycliques. Ce résultat est relativement facile. Mais on a dû attendre jusque 1969 pour une description précise des indécomposables dans le cas cyclique (Kupisch, Janusz). Dans le cas du groupe linéaire, cette description s'applique au cas  $m = 2$  et  $s = 1$ .

Comme la description générale est assez ardue, nous ne voulons expliciter que le cas particulier où  $G$  contient seulement un  $p$ -sous-groupe de Sylow  $S$ , nécessairement normal dans  $G$ . Ceci a lieu par exemple lorsque  $G$  est le groupe des matrices  $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$  à coefficients dans  $\mathbf{F}_p = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ . Il y a alors un

complément  $K$  de  $S$  dans  $G$ , c'est-à-dire un sous-groupe tel que  $S \cap K = \{1\}$  et  $S \cdot K = G$ . Si  $\sigma$  désigne un générateur de  $S = \{1, \sigma, \sigma^2, \dots, \sigma^{p^a-1}\} = \sigma^{\mathbf{Z}/p^a\mathbf{Z}}$ , l'opération de  $K$  sur  $S$  par automorphismes intérieurs est donnée par une formule du type

$$x \sigma x^{-1} = \sigma^{\chi(x)} \text{ avec } x \in K \text{ et } \chi(x) \in \mathbf{Z} / p^a \mathbf{Z}.$$

L'opération induite de  $K$  sur  $k[S]$  laisse stable le drapeau

$$k[S] \supset k[S](\sigma - 1) \supset k[S](\sigma - 1)^2 \dots$$

d'où l'on déduit l'existence d'un élément  $\pi \in k[S](\sigma - 1)$ , congru à  $\sigma - 1$  modulo  $(\sigma - 1)^2$  et tel que

$$x \pi x^{-1} = \chi(x) \pi \text{ pour tout } x \in K$$

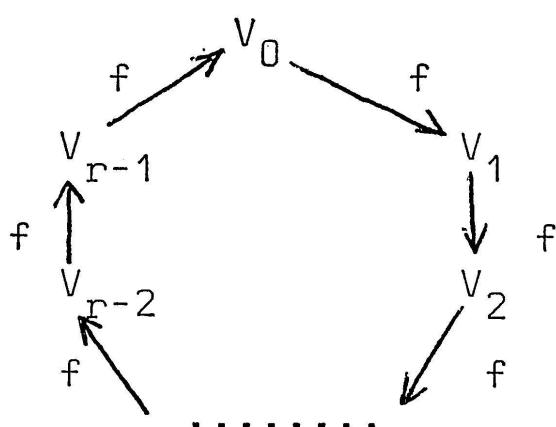
(choisir un supplémentaire de  $k[S](\sigma - 1)^2$  dans  $k[S](\sigma - 1)$  stable sous  $K$ ).

Considérons maintenant l'ensemble  $\mathcal{E}$  des classes d'isomorphisme de  $K$ -modules simples. Pour tout  $e \in \mathcal{E}$  nous choisissons un module simple  $E(e)$  dans la classe  $e$  et nous notons  ${}_x E(e)$  le  $K$ -module ayant même espace sous-jacent que  $E(e)$ , la nouvelle opération  $*$  de  $K$  étant reliée à l'ancienne au moyen de la formule

$$x * m = \chi(x) x \cdot m.$$

On obtient ainsi une opération  $(n, e) \mapsto \chi^n \cdot e$  de  $\mathbf{Z}$  sur  $\mathcal{E}$  telle que  $E(\chi^n e) \cong {}_{\chi} E(\chi^{n-1} e)$ . Les orbites de  $\mathbf{Z}$  dans  $\mathcal{E}$  sont, comme nous allons le voir, reliées aux  $G$ -modules indécomposables.

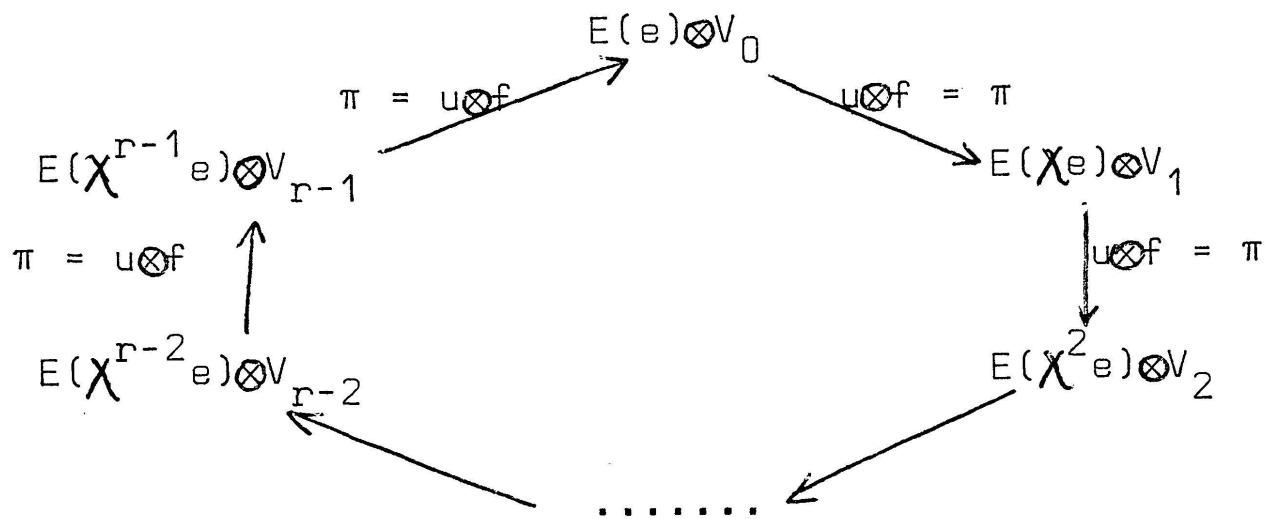
Partons d'une orbite  $e = \chi^r \cdot e, \chi \cdot e, \chi^2 \cdot e, \dots, \chi^{r-1} \cdot e$  de  $\mathbf{Z}$  dans  $\mathcal{E}$  et d'une « couronne » de hauteur  $\leq p^a$  de  $r$  espaces vectoriels. Une telle couronne est par définition un diagramme d'espaces vectoriels de la forme



avec  $f^{p^a} = f \circ f \circ \dots \circ f = 0$ . A ces données nous associons un  $G$ -module d'espace sous-jacent

$$\bigoplus_{i=0}^{i=r-1} E(\chi^i e) \otimes_k V_i.$$

L'opération de  $K$  est induite par celles de  $K$  sur les modules simples  $E(\chi^i e)$ . L'opération de  $\sigma \in S$  sur les différents facteurs  $E(\chi^i e) \otimes_k V_i$  est déterminée si l'on connaît celle de  $\pi$ , qui est elle-même décrite par la figure ci-dessous



où les  $u : {}_\chi E(\chi^i e) \xrightarrow{\sim} E(\chi^{i+1} e)$  sont des  $K$ -isomorphismes choisis une fois pour toutes.

Le  $G$ -module ainsi construit est indécomposable si et seulement si notre couronne d'espaces vectoriels est indécomposable. Ceci a lieu s'il existe un  $v \in V_i$  dont les itérés non nuls  $v, f(v), f^2(v), \dots$  forment une base de  $V_{r-1}$ .

$\bigoplus_{j=0}^{r-1} V_j$ . On peut montrer qu'on obtient ainsi tous les  $G$ -modules indécomposables.

#### 4. ESPACES VECTORIELS MUNIS DE SOUS-ESPACES. ([4], [6])

Soit  $\mathbf{O}$  un ensemble ordonné. Une  $k$ -représentation linéaire de  $\mathbf{O}$  consiste en la donnée d'un  $k$ -espace vectoriel de dimension finie  $V$  et d'une famille de sous-espaces  $(V(i))_{i \in \mathbf{O}}$  tels que  $V(i) \subset V(j)$  si  $i \leq j$ . La somme directe de deux représentations  $V'$  et  $V''$  a pour espace sous-jacent  $V' \oplus V''$  et est telle que

$$(V' \oplus V'')(i) = V'(i) \oplus V''(i)$$