**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
**Band:** 20 (1974)
**Heft:** 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** PROBLÈMES ACTUELS DE THÉORIE DES REPRÉSENTATIONS
**Autor:** Gabriel, Pierre
**Kapitel:** 2. Modules de dimension finie sur $k[X,Y]/(X^m,X Y,Y^n)$.
**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-46914

**Nutzungsbedingungen**
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

**Conditions d'utilisation**
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

**Terms of use**
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

**Download PDF:** 07.08.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch**

Le processus (dialectique !) d'alternance de périodes expérimentales et théoriques se poursuit avec quelques interruptions, car la question ne passionne vraiment les mathématiciens que par intermittence. En 1968 Gelfand et Ponomarev classifient les modules de dimension finie sur l'anneau $\mathbf{C}\,[X, Y]/(X\,Y)$. S'appuyant sur des résultats de Dade, Kupisch et Janusz construisent en 1969 les représentations modulaires indécomposables des groupes finis à sous-groupes de Sylow cycliques... En 1974 enfin, Nazarova et Roiter publient une démonstration de la conjecture de Brauer-Thrall fondée sur une quantité appréciable de résultats de nature expérimentale obtenus auparavant. Ce sont ces résultats expérimentaux que nous voulons aborder ici.

## 2. Modules de dimension finie sur $k\,[X, Y]/(X^m, X\,Y, Y^n)$.

Nous désignons par $k$ un corps commutatif, et nous nous intéressons en fait aux modules de $k$-dimension finie sur l'anneau $k\,[[X, Y]]/(X\,Y)$. Un tel module consiste en la donnée d'un $k$-espace vectoriel de dimension finie $M$ et de deux endomorphismes $x, y$ tels que $xy = yx = 0$ et $x^m = y^n = 0$ pour $m$ et $n$ assez grands.

$$\begin{tikzcd}
e_0 \arrow[r, "x"] & e_1 \arrow[r, "x"] & e_2 \arrow[d, "y"] & & & \\
& & e_3 \arrow[d, "y"] & & & \\
& & e_4 \arrow[r, "x"] & e_5 \arrow[r, "x"] & e_6 \arrow[r, "x"] & e_7 \arrow[d, "y"] \\
& & & & & e_8
\end{tikzcd}$$

On peut associer à toute suite $n_1, n_2, \ldots, n_r$ d'entiers naturels $\geqslant 1$ un module dit de *première espèce* et d'espace sous-jacent $k^{1+n_1+\ldots+n_r}$. Nous explicitons les endomorphismes pour l'exemple de la suite 2, 2, 3, 1. Si $e_0, e_1, \ldots, e_8$ est la base naturelle de $k^{1+2+2+3+1}$, $x$ envoie $e_0$ sur $e_1$, $e_1$ sur $e_2$, $e_2$ sur 0, $e_3$ sur 0, $e_4$ sur $e_5$, ..., $e_7$ sur 0, $e_8$ sur 0, tandis que $y$ envoie $e_0$ sur 0, $e_1$ sur 0, $e_2$ sur $e_3$, $e_3$ sur $e_4$, $e_4$ sur 0, ..., $e_7$ sur $e_8$ et $e_8$ sur 0 (se reporter à la figure ci-dessus). Les modules ainsi obtenus sont tous *indécomposables*, c'est-à-dire qu'ils ne s'écrivent pas comme somme directe de sous-modules non nuls.

On peut construire des modules de $2^e$ *espèce* à partir d'un monôme « non commutatif » en $x$ et $y^{-1}$ et d'un espace vectoriel $V$ muni d'un automorphisme $\sigma$. Au monôme $x^2\, y^{-1}\, xy^{-2}$ correspond par exemple le module d'espace sous-jacent $V^{2+1+1+2} = V^6$, $x$ et $y$ opérant sur les différents facteurs de $V$ comme l'indique la figure suivante

$$\begin{tikzcd}
 & V \arrow[rr, "y=\mathrm{id}"] \arrow[dl, "x=\mathrm{id}"'] & & V \arrow[dr, "y=\sigma"] & \\
V & & & & V \\
 & V \arrow[ul, "y=\mathrm{id}"] \arrow[rr, "x=\mathrm{id}"'] & & V \arrow[ur, "x=\mathrm{id}"'] &
\end{tikzcd}$$

(ne pas perdre de vue que $xy = yx = 0$). Si l'on tient à obtenir une liste irrédondante de modules indécomposables de $2^e$ espèce, il faut évidemment supposer que $V$ n'est pas somme directe de 2 sous-espaces non nuls stables sous $\sigma$. Des monômes admissibles il faut en outre exclure les puissances, par exemple $y^{-1}\, xy^{-1}\, x = (y^{-1}x)^2$, et il convient de ne pas distinguer entre 2 monômes déduits l'un de l'autre par permutation cyclique, par exemple entre $x^2\, y^{-1}\, xy^{-2}$ et $y^{-1}\, x^2\, y^{-1}\, xy^{-1}$.

Gelfand et Ponomarev ont pu démontrer que tout module de dimension finie sur $k\,[[X, Y]]/(X\,Y)$ est une somme directe de modules indécomposables, de première ou de deuxième espèce [2]. L'interêt de cet énoncé réside en particulier dans le fait que, d'après Drozd, tout quotient de dimension finie de $k\,[[X, Y]]$ a lui-même un quotient de la forme $k\,[X, Y]/(X^2, X\,Y^2, Y^3)$, à moins qu'il ne soit isomorphe à l'un des anneaux suivants

$$k[X, Y]/(X^m, XY, Y^n) \quad \text{ou} \quad k[X, Y]/(X^m, XY, Y^n, X^m - \lambda Y^n)\,.$$

(Nous supposons ici $k$ algébriquement clos de caractéristique $\neq 2$). Dans le deuxième cas, Gelfand et Ponomarev nous fournissent une classification complète des modules de dimension finie. Dans le premier cas, Drozd peut montrer qu'une telle classification est hors de notre portée, dans la mesure où la connaissance des modules sur $k\,[X, Y]/(X^2, X\,Y^2, Y^3)$ impliquerait celle des modules sur toute algèbre de type fini.