Le processus (dialectique !) d'alternance de périodes expérimentales et théoriques se poursuit avec quelques interruptions, car la question ne passionne vraiment les mathématiciens que par intermittence. En 1968 Gelfand et Ponomarev classifient les modules de dimension finie sur l'anneau $\mathbf{C}[X, Y]/(X\,Y)$. S'appuyant sur des résultats de Dade, Kupisch et Janusz construisent en 1969 les représentations modulaires indécomposables des groupes finis à sous-groupes de Sylow cycliques... En 1974 enfin, Nazarova et Roiter publient une démonstration de la conjecture de Brauer-Thrall fondée sur une quantité appréciable de résultats de nature expérimentale obtenus auparavant. Ce sont ces résultats expérimentaux que nous voulons aborder ici.

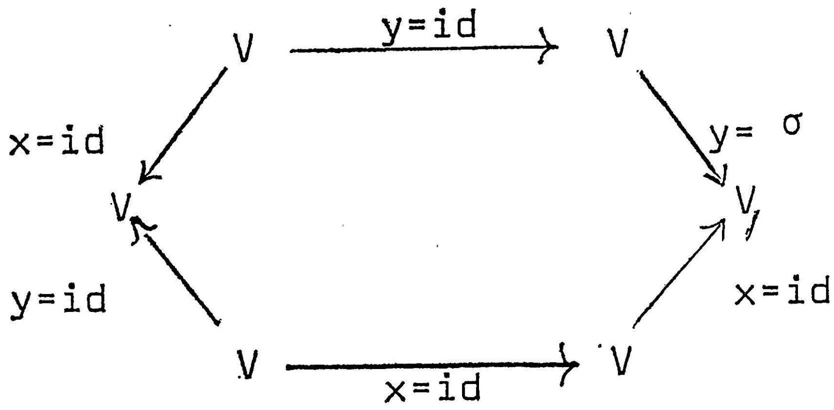
2. Modules de dimension finie sur $k[X, Y]/(X^m, X\,Y, Y^n)$.

Nous désignons par k un corps commutatif, et nous nous intéressons en fait aux modules de k-dimension finie sur l'anneau $k[[X, Y]]/(X\,Y)$. Un tel module consiste en la donnée d'un k-espace vectoriel de dimension finie M et de deux endomorphismes x, y tels que $xy = yx = 0$ et $x^m = y^n = 0$ pour m et n assez grands.

$$\begin{tikzcd}
e_0 \arrow[r, "x"] & e_1 \arrow[r, "x"] & e_2 \arrow[d, "y"] & & & \\
& & e_3 \arrow[d, "y"] & & & \\
& & e_4 \arrow[r, "x"] & e_5 \arrow[r, "x"] & e_6 \arrow[r, "x"] & e_7 \arrow[d, "y"] \\
& & & & & e_8
\end{tikzcd}$$

On peut associer à toute suite $n_1, n_2, ..., n_r$ d'entiers naturels $\geqslant 1$ un module dit de *première espèce* et d'espace sous-jacent $k^{1+n_1+\cdots+n_r}$. Nous explicitons les endomorphismes pour l'exemple de la suite 2, 2, 3, 1. Si $e_0, e_1, ..., e_8$ est la base naturelle de $k^{1+2+2+3+1}$, x envoie e_0 sur e_1, e_1 sur e_2, e_2 sur 0, e_3 sur 0, e_4 sur e_5, ..., e_7 sur 0, e_8 sur 0, tandis que y envoie e_0 sur 0, e_1 sur 0, e_2 sur e_3, e_3 sur e_4, e_4 sur 0, ..., e_7 sur e_8 et e_8 sur 0 (se reporter à la figure ci-dessus). Les modules ainsi obtenus sont tous *indécomposables*, c'est-à-dire qu'ils ne s'écrivent pas comme somme directe de sous-modules non nuls.

On peut construire des modules de *2ᵉ espèce* à partir d'un monôme « non commutatif » en x et y^{-1} et d'un espace vectoriel V muni d'un automorphisme σ. Au monôme $x^2 y^{-1} xy^{-2}$ correspond par exemple le module d'espace sous-jacent $V^{2+1+1+2} = V^6$, x et y opérant sur les différents facteurs de V comme l'indique la figure suivante



(ne pas perdre de vue que $xy = yx = 0$). Si l'on tient à obtenir une liste irrédondante de modules indécomposables de 2ᵉ espèce, il faut évidemment supposer que V n'est pas somme directe de 2 sous-espaces non nuls stables sous σ. Des monômes admissibles il faut en outre exclure les puissances, par exemple $y^{-1} xy^{-1} x = (y^{-1}x)^2$, et il convient de ne pas distinguer entre 2 monômes déduits l'un de l'autre par permutation cyclique, par exemple entre $x^2 y^{-1} xy^{-2}$ et $y^{-1} x^2 y^{-1} xy^{-1}$.

Gelfand et Ponomarev ont pu démontrer que tout module de dimension finie sur $k[[X, Y]]/(X Y)$ est une somme directe de modules indécomposables, de première ou de deuxième espèce [2]. L'interêt de cet énoncé réside en particulier dans le fait que, d'après Drozd, tout quotient de dimension finie de $k[[X, Y]]$ a lui-même un quotient de la forme $k[X, Y]/(X^2, X Y^2, Y^3)$, à moins qu'il ne soit isomorphe à l'un des anneaux suivants

$$k[X, Y]/(X^m, XY, Y^n) \quad \text{ou} \quad k[X, Y]/(X^m, XY, Y^n, X^m - \lambda Y^n).$$

(Nous supposons ici k algébriquement clos de caractéristique $\neq 2$). Dans le deuxième cas, Gelfand et Ponomarev nous fournissent une classification complète des modules de dimension finie. Dans le premier cas, Drozd peut montrer qu'une telle classification est hors de notre portée, dans la mesure où la connaissance des modules sur $k[X, Y]/(X^2, X Y^2, Y^3)$ impliquerait celle des modules sur toute algèbre de type fini.