

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 20 (1974)  
**Heft:** 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** SOMMES DE CARRÉS D'ENTIERES D'UN CORPS  
**Autor:** Moser, Claude  
**Kapitel:** 4. RÉSULTATS PROPRES AU CAS  $p = 2$  ET  $e$  IMPAIR  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-46913>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 16.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

Ceci montre l'existence d'un isomorphisme entre le groupe  $V/U_{2d+1}$  et le groupe  $U^2/U_{d+1}^2$ . La proposition sera alors une conséquence du lemme de Herbrand :

*Lemme de Herbrand.* Soit  $\varphi : G \rightarrow G'$  un homomorphisme de groupes et soit  $H$  un sous-groupe de  $G$ .

1. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :
  - a) le sous-groupe  $H$  est d'indice fini dans  $G$  ;
  - b) les indices  $(\varphi(G) : \varphi(H))$  et  $(\text{Ker } \varphi = H \cap \text{Ker } \varphi)$  sont finis.
2. Si les assertions ci-dessus sont vraies, alors :

$$(G:H) = (\varphi(G) : \varphi(H)) \cdot (\text{Ker } \varphi : H \cap \text{Ker } \varphi) .$$

Pour une démonstration, voir [4] § 63.

Appliquons ce lemme au groupe  $U$ , à son sous-groupe  $U_{d+1}$  et à l'homomorphisme  $\varphi : U \rightarrow U^2 (x \mapsto x^2)$ ; puisque  $-1$  appartient à  $U_{d+1}$ , on a l'égalité

$$(U : U_{d+1}) = (U^2 : U_{d+1}^2)$$

et les égalités :

$$(U : U_{2d+1}) = (U : U_{d+1}) (U_{d+1} : U_{2d+1}) = (U : V) (V : U_{2d+1}) .$$

On en conclut :

$$(U : V) = (U_{d+1} : U_{2d+1}) = 2^{df} .$$

#### 4. RÉSULTATS PROPRES AU CAS $p = 2$ ET $e$ IMPAIR

##### 4.1. Théorème

Supposons  $e$  impair et soit  $u \in U$ . Alors :

1. Si  $\delta(u) > e$ ,  $u$  est somme de deux carrés dans  $A$  ;
2. Si  $\delta(u) = e$ , il existe  $a, b \in U$  tels que  $u = a^2 + 2b$  ; avec ces notations, les trois assertions suivantes sont équivalentes :
  - a) l'unité  $u$  est somme de deux carrés dans  $A (u \in V_2)$  ;
  - b) la trace absolue de  $(b/a^2)$  appartient à  $2\mathbb{Z}_2$  ;
  - c) il existe  $c \in U$  tel que  $b = a^2 (c^2 - c)$ .

De plus :

3. Si  $f$  est pair on a  $s(A) = 2$ ,  $V = V_3$  et  $t(A) = 3$ ;

4. Si  $f$  est impair on a  $s(A) = 4$ ,  $V = V_4$  et  $t(A) = 4$ ; pour que  $u$  appartienne à  $V_4$  mais non à  $V_3$ , il faut et il suffit que  $-u$  soit un carré dans  $A$ .

La première assertion est une répétition de la seconde assertion de la proposition (3.1.). Avant d'examiner les assertions suivantes faisons quelques remarques. Tout d'abord  $-1$  n'est pas un carré dans  $K$  puisqu'on a  $\delta(-1) = e$  en vertu de la dernière assertion de la proposition (1.3.2.).

Ensuite remarquons que si  $v$  est une unité de  $\mathbf{Q}_2(i)$  ( $i^2 = -1$ ), alors  $N_{\mathbf{Q}_2(i)/\mathbf{Q}_2}(v) \in 1 + 4\mathbf{Z}_2$ . En effet, une base d'entiers de  $\mathbf{Q}_2(i)$  est  $\{1, i\}$  et si  $v = \alpha + i\beta$ , alors  $N_{\mathbf{Q}_2(i)/\mathbf{Q}_2}(v) = \alpha^2 + \beta^2$ , l'un et l'un seulement des nombres  $\alpha, \beta$  étant une unité de  $\mathbf{Z}_2$ .

Signalons que relativement à l'extension résiduelle  $\bar{K}/\mathbf{F}_2$  la trace  $tr : \bar{K} \rightarrow \mathbf{F}_2$  est un homomorphisme surjectif de groupes additifs dont le noyau est  $\{u \mid \exists y \in \bar{K}, u = y^2 - y\}$  (cf. [2] page 8, prop. 9). Ceci étant dit, soit  $u$  une unité de  $A$  dont le défaut quadratique est  $e$ . Si on a  $u = a^2 + 2b$  et si  $u$  est somme de deux carrés d'entiers, alors la norme de  $u$  est, dans l'extension  $K/\mathbf{Q}_2$ , la norme d'une unité de  $\mathbf{Q}_2(i)$ .

On a alors:

$$N_{K/\mathbf{Q}_2}(u) = [N_{K/\mathbf{Q}_2}(a)]^2 [1 + 2 \operatorname{Tr}_{K/\mathbf{Q}_2}(b/a^2) + 4h] \quad (h \in \mathbf{Z}).$$

Puisque  $a$  est une unité de  $A$ , on a  $[N_{K/\mathbf{Q}_2}(a)]^2 \in 1 + 8\mathbf{Z}_2$ . La deuxième remarque faite ci-dessus permet alors de conclure que  $\operatorname{Tr}_{K/\mathbf{Q}_2}(b/a^2) \in 2\mathbf{Z}_2$ .

Maintenant, si l'unité  $u = a^2 + 2b$ , ( $b \in U$ ), satisfait à  $\operatorname{Tr}_{K/\mathbf{Q}_2}(b/a^2) \in 2\mathbf{Z}_2$ , il existe  $c_0 \in \bar{K}$  tel que la classe de  $(b/a^2)$  modulo  $\mathfrak{P}$  soit  $c_0^2 - c_0$ . L'application du lemme de Hensel au polynôme  $X^2 - X - (b/a^2)$  permet de conclure à l'existence d'une unité  $c$  de  $A$  telle que  $b = a^2(c^2 - c)$ .

Enfin, s'il existe  $c \in U$  avec  $b = a^2(c^2 - c)$  on peut écrire  $u = a^2 + 2b$  sous la forme  $u = a^2[c^2 + (c-1)^2]$  et  $u \in V_2$ .

3. Si  $f$  est pair, on remarque que  $K$  contient une racine primitive cubique  $j$  de l'unité. On a  $-1 = j^4 + j^2$  et  $s(A) = 2$ . Si  $u \in U$  satisfait à  $\delta(u) \geq e$  on peut écrire  $u = a^2 + 2b$  ( $a \in U, b \in A$ ) et  $u = (a + b/a)^2 - (b/a)^2 \in V_3$ . L'assertion sur  $t(A)$  sera démontrée plus loin (cf. Proposition 4.2, remarque).

4. Remarquons que  $\operatorname{Tr}_{K/\mathbf{Q}_2}(-1) = -ef \notin 2\mathbf{Z}_2$ . Par conséquent  $-1$  n'est pas somme de deux carrés dans  $A$ , ni même de trois (vérification facile). Donc la forme quadratique  $X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2$  n'est pas isotrope sur  $K$ . On a bien  $-1 = 1 + 1 + 4 - 7 \in V_4$ , donc  $-U^2 \subset V_4/V_3$ .

Maintenant soit  $u \in V$  tel que  $u$  n'appartienne ni à  $U^2$  ni à  $-U^2$ . Pour toute  $v \notin \dot{K}^2$  soit  $G(v)$  le sous-groupe de  $\dot{K}$  formé par les normes dans l'extension  $K(\sqrt{v})/K$ . D'après la proposition (1.2.) les groupes  $G(u)$  et  $G(-1)$  sont d'indice 2 dans  $\dot{K}$ . Il existe donc  $x \in G(u)/G(-1)$ ; puisque  $-1 \notin G(-1)$ , il existe  $y, v, w, t \in K$  non tous nuls tels que  $y^2 - uv^2 = -(w^2 + t^2)$ . On a  $v \neq 0$  et on déduit de là que  $u$  est somme de trois carrés dans  $K$ . Reste à montrer que  $u$  appartient à  $V_3$ .

Dans un premier temps remarquons que si  $u$  appartient à  $V/V_2$ , alors  $-u$  appartient à  $V_2$ . En effet, quitte à multiplier  $u$  par le carré d'une unité on peut supposer que  $u = 1 + 2b$  avec  $b \in A$  et  $Tr_{K/Q_2}(b) \in 1 + 2\mathbb{Z}_2$ ; on a alors  $-u = 1 - 2(b+1)$  et  $Tr_{K/Q_2}(-(b+1)) = -ef + Tr_{K/Q_2}(-b) \in 2\mathbb{Z}_2$ . Dans un second temps on peut écrire  $u$  sous les deux formes

$$u = \pi^{-2n}(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) = -(b_1^2 + b_2^2)$$

avec  $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 \in A$ . Si on suppose l'entier  $n$  minimum on peut supposer que  $a_1$  est une unité. Si  $a_2$  et  $a_3$  appartiennent à  $\mathfrak{P}$  alors  $n = 0$  et on a  $u \in V_3$ . Supposons donc que  $a_1$  et  $a_2$  sont des unités. De l'égalité ci-dessus on déduit la suivante:

$$(a_1 + b_1\pi^n + b_2\pi^n)^2 + a_3^2 + a_2^2 - 2\pi^n(a_1b_1 + a_1b_2 - b_1b_2\pi^n) = 0;$$

si on avait  $n \geq 1$ , l'entier  $a_2^2 - 2\pi^n(a_1b_1 + a_1b_2 - b_1b_2\pi^n)$  serait somme de deux carrés d'entiers et la forme  $X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2$  serait isotrope sur  $K$ . Contradiction. On a donc  $n = 0$  et  $u \in V_3$ .

De tout ceci on déduit évidemment:  $V = V_4$  et  $V_4/V_3 = -U^2$ .

## 4.2. Proposition

Soit  $u$  une unité de  $A$ . On a les résultats suivants :

1. Le plus petit entier pair  $2k$  tel que  $u\pi^{2k}$  appartienne à  $A_2$  est  $\max [0, e - \delta(u)]$ ; pour tout entier pair  $2l \geq \max [0, e - \delta(u)]$ ,  $u\pi^{2l}$  est somme de  $n$  carrés dans  $A$  si et seulement si  $u$  est somme de  $n$  carrés dans  $K$ ;

2. Le plus petit entier impair  $2k+1$  tel que  $u\pi^{2k+1}$  appartienne à  $A_2$  est  $e$ ; pour tout entier impair  $2l+1 \geq e$ ,  $u\pi^{2l+1}$  est somme de deux ou de trois carrés dans  $A$  selon que  $u\pi$  est ou n'est pas somme de deux carrés dans  $K$ .

1. Si  $\delta(u) \geq e$  on a  $u \in V$  d'après le théorème (4.1.). Si  $\delta(u) < e$  on a  $u\pi^{e-\delta(u)} = a^2\pi^{e-\delta(u)} + \pi^e v$  avec  $a, v \in U$  et l'assertion initiale résulte de l'assertion 1) de la proposition (3.1.).

a) Le cas  $f$  pair : si  $f$  est pair, tout élément de  $A$  est somme de trois carrés dans  $K$  puisque  $s(A) = 2$ . Si  $\delta(u) > e$ , on a  $u \in V_2$  et il n'y a rien à démontrer. Si  $\delta(u) = e$ , il suffit de montrer que si  $u$  est somme de deux carrés dans  $K$ , alors  $u$  appartient à  $V_2$ . Si  $u$  est somme de deux carrés dans  $K$ , il existe  $v \in \mathbb{N}$ ,  $a, v, x \in U, y \in A$  tels que :  $u\pi^{2v} = a^2\pi^{2v} + 2v\pi^{2v} = x^2 + y^2$ ; si on avait  $v > 0$ ,  $y$  serait une unité et on aurait :

$$-1 = x^{-2} \{ (y + a\pi^v)^2 - 2a\pi^v - 2a^2\pi^{2v} - 2\pi^v v \}$$

ce qui impliquerait  $\delta(-1) > e$ . Contradiction puisque  $\delta(-1) = e$  d'après la dernière assertion de la proposition (1.3.2.). On a donc  $v = 0$  et  $u \in V_2$ . Enfin, dans le cas où  $\delta(u) < e$ , on peut écrire de manière analogue

$$u = a^2 + v\pi^{\delta(u)} \quad \text{avec } a, v \in U ;$$

si  $u$  est somme de deux carrés dans  $K$ , soit  $v$  le plus petit entier tel que  $u\pi^{2v}$  soit somme de deux carrés dans  $A$ . Il existe  $x, y \in U$  tels que  $u\pi^{2v} = x^2 + y^2$ , et on obtient :

$$-1 = x^{-2} \{ -y + a\pi^v \}^2 - v\pi^{2v+\delta(u)} - 2\pi^v (ay - a^2\pi^v) \} ;$$

puisque  $\delta(-1) = e$ , on a bien  $2v + \delta(u) = e$ .

b) Le cas  $f$  impair : la proposition est vraie pour  $n = 1$ . En ce qui concerne le cas  $n = 2$ , elle se démontre comme dans a). Si  $u$  appartient à  $V_3 \setminus V_2$ , il n'y a rien à démontrer. Si  $u \in U \setminus V$  est somme de trois carrés dans  $K$ , soit  $2v$  le plus petit entier pair tel que  $u\pi^{2v}$  soit somme de trois carrés dans  $A$ . Il existe  $x \in U, y, z \in A$  tels que  $u\pi^{2v} = x^2 + y^2 + z^2$  et on a :

$$-1 = x^{-2} \{ (y + z + a\pi^v)^2 - v\pi^{2v+\delta(u)} - 2yz - 2a\pi^v (y + z + a\pi^v) \} .$$

Si  $yz \in \mathfrak{P}$ , on a immédiatement  $2v + \delta(u) = e$  puisque  $v > 0$ .

Si  $yz \in U$ , on a nécessairement  $2v + \delta(u) \geq e$  et on peut écrire :

$$-1 = x^{-2} \{ (y + a\pi^v)^2 + z^2 - v\pi^{2v+\delta(u)} - 2a^2\pi^{2v} - 2ay\pi^v \} .$$

Si on avait  $\delta(u) + 2v > e$ , on aurait  $z^2 - v\pi^{2v+\delta(u)} - 2a^2\pi^{2v} - 2ay\pi^v \in V_2$  et  $-1$  serait somme de trois carrés dans  $A$ . Contradiction.

Enfin, si  $u$  n'est pas somme de trois carrés dans  $K$ , on a  $u \in -U^2$  et  $u$  est somme de quatre carrés et pas moins dans  $A$ .

2. La première assertion résulte de la proposition (3.1.). De plus  $u\pi$  est somme de trois carrés dans  $K$  quelle que soit la parité de  $f$ , car  $-u\pi$  n'est pas un carré.

Si  $f$  est pair, il existe  $v \in U$  tel que  $u\pi^e = 2v$ , et on a  $u\pi^e = (v+1)^2 - (1+v^2)$ , somme de trois carrés dans  $A$ . De plus si  $u\pi$  est somme de deux carrés dans  $K$  et si  $2l+1$  est le plus petit entier impair tel que  $u\pi^{2l+1}$  soit somme de deux carrés dans  $A$ , il existe deux unités  $a, b$  de  $A$  telles que  $a^2 + b^2 = u\pi^{2l+1}$ . On a alors  $-1 = a^{-2} \{ b^2 + u\pi^{2l+1} \}$  et on conclut que  $2l+1 = e$ .

Si  $f$  est impair, soit  $2l+1$  le plus petit entier impair tel que  $u\pi^{2l+1}$  soit somme de trois carrés dans  $A$ . Il existe  $x \in A, y, z \in U$  tels que  $u\pi^{2l+1} = x^2 + y^2 + z^2$ , ce qui donne

$$-1 = y^{-2} \{ z^2 - u\pi^{2l+1} + x^2 \};$$

puisque  $s(A) = 4$ , on a  $2l+1 \leq e$  d'après le théorème (4.1.). Par ailleurs on a  $2l+1 \geq e$  d'après la proposition (3.1.). Donc  $2l+1 = e$ . Enfin, si  $u\pi$  est somme de deux carrés dans  $K$ , on raisonne comme dans le cas  $f$  pair.

Remarque: Il est clair d'après ce qui précède que  $t(A) = 4$  si  $f$  est impair. Par ailleurs, si  $f$  est pair on a  $V_3 \neq V_2$ , ce qui montre que  $t(A) = 3$ . En effet, l'application trace de  $\bar{K}$  dans  $F_2$  est surjective: il existe  $u \in U$  tel que la trace de la classe de  $u$  soit 1 dans  $F_2$ . Alors  $1 + 2u \in V_3/V_2$ .

#### 4.3. Exemple numérique

1. Prenons d'abord l'exemple du corps  $K = \mathbf{Q}_2(\sqrt[3]{6})$ . C'est une extension totalement ramifiée de degré 3 de  $\mathbf{Q}_2$  dont une uniformisante  $\pi$  est précisément  $\sqrt[3]{6}$ . Remarquons qu'on a les égalités:

$$(U : V) = 2 \quad \text{et} \quad (V : V_2) = 2 = (V_2 : U^2).$$

Un système de représentants de  $U$  modulo  $V$  est  $\{ +1, 1 + \sqrt[3]{6} \}$ .

Un système de représentants de  $V$  modulo  $V_2$  est  $\{ 1, -1 \}$ .

Un système de représentants de  $V_2$  modulo  $U^2$  est  $\{ 1, 1 + 2\sqrt[3]{6} \}$ .

On a évidemment  $1 + 2\sqrt[3]{6} = 1 + (\sqrt[3]{6})^4 - 4\sqrt[3]{6}$ . Considérons maintenant l'unité  $1 + \sqrt[3]{6}$ . Cette unité a pour défaut quadratique 1, de même que son opposé. On en déduit que le plus petit entier pair tel que  $\pi^{2k}(1 + \pi)$  soit somme de carrés dans  $A$  est  $2k = 2$ . De plus  $\pi^{2k}(1 + \pi)$  et  $-\pi^{2k}(1 + \pi)$  sont tels que l'un est somme de deux carrés dans  $A$  et pas moins et l'autre somme de trois carrés et pas moins. Effectivement on a les égalités:

$$-\pi^2(1 + \pi) = -\pi^2 - 6 = 9\pi^2 - 7 + 1 - 10\pi^2.$$

Dans  $\mathbf{Z}_2$ , l'une des racines carrées de  $-7$  est de la forme  $1 + 4a$  et on a :

$$\begin{aligned} -\pi^2(1+\pi) &= (1+4a-3\pi)^2 - 6\pi - 12a\pi + 1 - 10\pi^2 \\ &= (1+4a-3\pi)^2 + (\pi^4 + 1 - 2\pi^2) - 12\pi - 12a\pi - 8\pi^2 \\ -\pi^2(1+\pi) &= (1+4a-3\pi)^2 + (1-\pi^2)^2 - 12\pi - 12a\pi - 8\pi^2. \end{aligned}$$

Ceci permet d'affirmer que  $-\pi^2(1+\pi)$  est somme de deux carrés dans  $A$  et que  $\pi^2(1+\pi)$  est somme de trois carrés et pas moins. Une représentation s'obtient par exemple à partir de l'égalité.

$$\pi^2(1+\pi) = \pi^2 + 6 = (\pi+2)^2 + 2(1-4\pi).$$

Ceci étant, le plus petit entier impair tel que  $(1+\pi)\pi^{2k+1}$  appartienne à  $A_2$  est  $e = 3$ . Mais  $\pi^3(1+\pi) = 6(1+\pi) = (-6)(-(1+\pi))$ . Or dans  $\mathbf{Z}_2$ ,  $-6 = 1 - 7$  est somme de deux carrés et on vient de voir que  $-(1+\pi)$  est somme de deux carrés dans  $K$ . Par conséquent  $6(1+\pi)$  est somme de deux carrés dans  $A$ . De façon « semi-explicite » on peut écrire  $-(1+\pi) = c^2 + d^2$  avec  $\pi c$  et  $\pi d$  dans  $A$  tels que  $\pi c \equiv \pi d \equiv 1 \pmod{\mathfrak{P}}$ . On a alors :

$$6(1+\pi) = [1+(1+4a)^2] \cdot [c^2 + d^2] = (c+d+4ad)^2 + (c-d-4ad)^2$$

et chacun des termes figurant entre parenthèses est un entier de  $K$ .

2. Pour obtenir un exemple où  $f$  est pair, considérons maintenant le corps  $K = \mathbf{Q}_2(\sqrt[3]{6}, j)$  où  $j$  est une racine cubique de l'unité. Une uniformisante est encore  $\sqrt[3]{6}$ . Mais dans ce corps  $1 + \sqrt[3]{6}$  est somme de deux carrés. Une unité qui est somme de trois carrés et pas moins est par exemple  $1 + 2(j + \sqrt[3]{6})$  puisqu'on a

$$\text{Tr}_{K/\mathbf{Q}_2}(j + \sqrt[3]{6}) = 3 \text{Tr}_{\mathbf{Q}_2(j)/\mathbf{Q}_2}(j) = -3.$$

On a d'ailleurs :

$$\begin{aligned} 1 + 2(j + \sqrt[3]{6}) &= (j^2 - \sqrt[3]{6})^2 + j^2(j + \sqrt[3]{6})^2 + j^4(j + \sqrt[3]{6})^2 \\ &= (j^2 - \sqrt[3]{6})^2 + (j^2 + j\sqrt[3]{6})^2 + (1 + j^2\sqrt[3]{6})^2. \end{aligned}$$

Remarquons enfin qu'on a  $(U : V) = 4$  dans ce cas et qu'un système de représentants de  $U$  modulo  $V$  est par exemple :

$$\{1, 1 + \sqrt[3]{6}, 1 + j\sqrt[3]{6}, 1 + j^2\sqrt[3]{6}\}.$$