**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique

**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

**Band:** 20 (1974)

**Heft:** 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** SUR CERTAINES APPLICATIONS GÉNÉRIQUES D'UNE VARIÉTÉ CLOSE A 3 DIMENSIONS DANS LE PLAN

**Autor:** Burlet, Oscar / de Rham, Georges

**Kapitel:** Remarques.

**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-46911

Supposons d'abord $c = 0$. Alors $g > 0$ et l'on peut trouver sur $A$ une courbe fermée simple $\Gamma$ non homologue à une combinaison des $C_i$. En posant pour toute courbe fermée $C$ transversale à $\Gamma$, $\chi(C) = 1$ ou $-1$ selon que le nombre des points d'intersection de $C$ avec $\Gamma$ est pair ou impair, on définit un caractère $\chi$ satisfaisant à la condition $c = 0$. Il résulte des propriétés topologiques bien connues des surfaces que tout autre caractère $\chi'$ satisfaisant à cette même condition peut être défini de la même manière à partir d'une autre courbe $\Gamma'$ analogue à $\Gamma$, et comme $\Gamma'$ peut être changée en $\Gamma$ par un automorphisme de $A$, $\chi$ et $\chi'$ sont équivalents. On peut construire le rêvetement à 2 feuillets associé à $\chi$ en prenant deux exemplaires de la surface $A$ coupée le long de $\Gamma$ et en les recollant de manière à former une ligne de croisement au-dessus de $\Gamma$.

Supposons maintenant $c > 0$. Soient $L_i$ $(i = 1, 2, ..., c)$ $c$ arcs simples deux-à-deux disjoints, $L_i$ joignant $C_{2i-1}$ à $C_{2i}$ à l'intérieur de $A$. En posant, pour toute courbe fermée $C$ transversale à $L = L_1 + L_2 + ... + L_c$, $\chi(C) = 1$ ou $-1$ selon que le nombre des points d'intersection de $C$ avec $L$ est pair ou impair, on définit un caractère satisfaisant aux conditions requises. C'est le seul pour lequel $\chi(C) = 1$ pour toute courbe fermée ne coupant pas $L$, et si $g = 0$ il n'y en a pas d'autre. Mais si $g > 0$, on voit, comme dans le cas $c = 0$, que tout autre caractère $\chi'$ peut être défini à l'aide d'une courbe fermée simple $\Gamma$ non homologue à une combinaison des $C_i$ et ne coupant pas les $L_i$, en posant, pour toute courbe fermée $C$ transversale à $\Gamma + L$, $\chi'(C) = 1$ ou $-1$ selon que le nombre de points d'intersection de $C$ avec $\Gamma + L$ est pair ou impair. On peut ensuite trouver un arc $L_1'$ ayant les mêmes extrémités que $L_1$, ne coupant pas les autres arcs $L_i$, tel que $L_1' - L_1$ soit homologue à $\Gamma$, et l'on voit que $\chi'$ peut aussi être défini par la condition que, pour toute courbe fermée $C$ transversale à $L' = L_1' + L_2 + ... + L_c$, $\chi'(C) = 1$ ou $-1$ selon que le nombre des points d'intersection de $C$ avec $L'$ est pair ou impair. Comme $L'$ peut être changé en $L$ par un automorphisme de $A$, $\chi'$ est équivalent à $\chi$. Remarquons encore pour terminer que le revêtement à 2 feuillets associé à $\chi$ peut être construit en prenant deux exemplaires de la surface $A$ coupée le long des $L_i$ et en les recollant de manière à former une ligne de croisement au-dessus de chacun des $L_i$.

Remarques.

Dans [5], F. Raymond a classé les actions de $S^1$ sur les variétés à 3 dimensions. Il se trouve que, dans le cas des variétés orientables $V_r$, les classes d'applications génériques spéciales sont en bijection avec les classes d'actions de $S^1$ pour lesquelles il y a des points fixes et pas d'orbites singulières. Effectivement, à l'aide du théorème II, il est facile de construire une action correspondante de $S^1$ sur $V_r$.

D'après les théorème V et VI seules quelques variétés très particulières admettent des applications génériques sans points singuliers du type (II) et (III) dans le plan.

Il n'en est plus de même lorsqu'on considère les applications génériques pouvant présenter des points singuliers du type (I) et (II).

En effet, des travaux de H. Levine [3], il résulte que toute variété close à trois dimensions admet une application générique dans le plan dont le pli comporte deux composantes connexes, l'une formée de points singuliers du type (I) et l'autre formée de points singuliers du type (II).

Citons pour terminer le travail de diplôme de M. Bina-Motlagh [1] où figurent de nombreux exemples d'applications génériques de $S^3$ dans le plan.

## BIBLIOGRAPHIE


[1] Bina-Motlagh, M. *Sur certaines applications génériques de $S^3$ dans le plan*, travail de diplôme, Université de Lausanne (1973).

[2] Hu, S. T. *Homotopy Theory*. Academic Press (1959).

[3] Levine, H. Elimination of cusps. *Topology*, Vol. 3 (1965) *supplément 1 et 2*, p. 263.

[4] Milnor, J. A unique decomposition theorem for 3-manifolds. *Amer. J. Math. 84* (1942).

[5] Raymond, F. Classification of the action of the circle on 3-manifolds. *Transactions of the A.M.S.* Vol. 131, No. 1 (1968), pp. 51-78.

[6] Thom, R. Singularités d'applications différentiables. *Annales de l'Institut Fourier*, Tome VI (1955-1956), p. 45.

[7] —— Les classes caractéristiques de Pontryagin des variétés triangulées. *Symposium Internacional de Topologia Algebrica*. Mexico 1958.

[8] Whitney, H. On singularities of mappings of euclidean spaces. *Ann. of Math. 62* (1955), p. 374.


*(Reçu le 20 août 1974)*

O. Burlet et G. de Rham

Institut de Mathématiques
Université de Lausanne, Dorigny
CH-1015 Lausanne