

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 20 (1974)
Heft: 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR CERTAINES APPLICATIONS GÉNÉRIQUES D'UNE VARIÉTÉ
CLOSE A 3 DIMENSIONS DANS LE PLAN
Autor: Burlet, Oscar / de Rham, Georges
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-46911>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 02.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

SUR CERTAINES APPLICATIONS GÉNÉRIQUES D'UNE VARIÉTÉ CLOSE A 3 DIMENSIONS DANS LE PLAN

par Oscar BURLET et Georges DE RHAM

Les applications différentiables génériques d'une variété close à trois dimensions M dans le plan, ou plus généralement dans une surface différentiable, comme on le rappelle ci-dessous, peuvent présenter trois types de singularités. Nous considérons celles qui ne présentent pas de singularités du type (II), que nous appelons génériques spéciales. Après un rappel de définitions et de certaines propriétés (§1 et §2), nous démontrons (§3) que si la variété M admet une application générique spéciale dans le plan, son groupe fondamental est libre. Dans le §4, par une méthode un peu différente, nous déterminons toutes les variétés M admettant des applications génériques spéciales dans R^2 : ce sont en fait toutes les variétés M actuellement connues dont le groupe fondamental est libre. De plus, pour chacune d'elles, nous montrons que ces applications se répartissent en un nombre fini de classes qui peuvent être caractérisées très simplement (th. V et VI).

1. Soit f une application différentiable (C^∞) d'une variété close (compacte, sans bord) à 3 dimensions M dans le plan R^2 . Un point x de M est appelé *point singulier* de f , (ou point critique de f) si le rang de la dérivée $f'(x)$, application linéaire de l'espace tangent à M en x dans R^2 , est plus petit que 2. L'application f est dite générique si, pour tout point singulier a , on peut trouver un voisinage U de a et des coordonnées x_1, x_2, x_3 dans U nulles en a , ainsi que des coordonnées y_1, y_2 dans R^2 , à l'aide desquelles f soit représentée dans U par l'un des systèmes d'équations suivantes:

$$(I) \begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_2 = x_2^2 + x_3^2 \end{cases} \quad (II) \begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_2 = x_2^2 - x_3^2 \end{cases} \quad (III) \begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_2 = x_2^2 + x_1 x_3 - x_3^3 \end{cases}$$

De tels systèmes de coordonnées seront dits *adaptés* à f en a .

Le terme « générique » est motivé par le fait que, dans l'espace de toutes les applications C^∞ de M dans R^2 , muni d'une topologie convenable et naturelle, l'ensemble des applications génériques est un ouvert partout dense. (Théorème de Whitney [8]).

Dans le voisinage U d'un point singulier a , la fibre au-dessus de $f(a)$, c'est-à-dire l'ensemble des points x de U tels que $f(x) = f(a)$, se réduit au point a dans le cas (I), se compose des deux arcs $(x_1=0, x_2=x_3)$ et $(x_1=0, x_2=-x_3)$ dans le cas (II), et de la courbe $(x_1=0, x_2^2=x_3^3)$ dans le cas (III).

Une application générique f peut donc présenter trois types de points singuliers, correspondant respectivement aux équations (I), (II) et (III). Les points singuliers situés dans le voisinage d'un point a du type (I) ou (II) sont définis, à l'aide de coordonnées adaptées à f en a , par $(x_2=x_3=0)$ et sont tous du même type que a , tandis qu'au voisinage d'un point du type (III) ils sont définis par $(x_2=0, x_1=3x_3^2)$, comme on le voit en examinant

la matrice de $f'(x)$, c'est-à-dire la matrice $\frac{\partial y_i}{\partial x_k}$ ($i=1, 2; k=1, 2, 3$). Si $(3c^2, 0, c)$ est un point singulier voisin du point a de type (III), on obtient des coordonnées X_1, X_2, X_3 et Y_1, Y_2 adaptées à f en ce point en posant

$$X_1 = x_1 - 3c^2, \quad X_2 = x_2, \quad X_3 = (x_3 - c) 3|c| \sqrt{1 + \frac{(x_3 - c)^2}{3c}},$$

$$Y_1 = y_1 - 3c^2, \quad Y_2 = y_2 - 2c^3$$

et les équations (III) deviennent

$$Y_1 = X_1, \quad Y_2 = X_2^2 - \frac{c}{|c|} X_3^2$$

Le point singulier $(3c^2, 0, c)$ est donc du type (I) si $c < 0$ et du type (II) si $c > 0$.

Il résulte de là que l'ensemble des points singuliers d'une application générique f est une sous-variété à une dimension de M , réunion finie de courbes lisses, simples, fermées et disjointes. On l'appelle *le pli de f* et on le désignera par Σ . Les points singuliers du type (I) et du type (II) forment deux ouverts disjoints de Σ , dont les composantes connexes sont appelées *arcs réguliers du pli*, de type (I) ou (II) selon le cas. Les points singuliers du type (III), appelés *points cuspidaux*, sont en nombre fini, chacun d'eux sépare deux arcs réguliers du pli, qui sont l'un du type (I) et l'autre du type (II).

Notons que si x_1, x_2, x_3 sont des coordonnées adaptées à f en le point a du pli Σ , comme coordonnée sur Σ au voisinage de a , on peut prendre x_1 si a est du type (I) ou (II), et x_3 si a est du type (III).

Rappelons encore qu'un *point critique* d'une fonction, c'est-à-dire un point où sa différentielle première est nulle, est dit *non dégénéré* si sa différentielle seconde est une forme quadratique non dégénérée. Une fonction

qui n'a que des points critiques non dégénérés est appelée une *fonction de Morse*. Une application différentiable est une *submersion* si sa dérivée est partout surjective, et une *immersion* si sa dérivée est partout injective.

PROPOSITION. I Soit $f : M \rightarrow R^2$ une application générique de la variété close M dans le plan R^2 et $\varphi : R^2 \rightarrow R$ une fonction sans points critiques, telle que la restriction $\varphi \circ f | \Sigma$ de $\varphi \circ f$ au pli n'ait que des points critiques non dégénérés. Alors $\varphi \circ f$ est une fonction de Morse sur M .

Démonstration. Un point régulier de f ne peut pas être un point critique de $\varphi \circ f$, car $(\varphi \circ f)' = \varphi' \circ f'$ y est surjective. Au voisinage d'un point a du pli, utilisons des coordonnées adaptées à f en a , et soit

$$\varphi(y_1, y_2) = a_0 + b_1 y_1 + b_2 y_2 + c_1 y_1^2 + \dots$$

le développement taylorien de φ autour de $f(a) = (0, 0)$. Si a est de l'un des types (I) ou (II), on a :

$$(\varphi \circ f)(x_1, x_2, x_3) = a_0 + b_1 x_1 + b_2 (x_2^2 \pm x_3^2) + c_1 x_1^2 + \dots$$

avec le signe $+$ pour le type (I) et $-$ pour le type (II), les termes non écrits étant de degré > 3 . Si $b_1 \neq 0$, ce n'est pas un point critique, si $b_1 = 0$, alors $b_2 \neq 0$ parce que φ est sans points critiques et $c_1 \neq 0$ sinon $\varphi \circ f | \Sigma = a_0 + c_1 x_1^2 + \dots$ aurait un point critique dégénéré, de sorte que a est un point critique non dégénéré de $\varphi \circ f$. Remarquons ici que si a est du type (II), x_3^2 étant précédé du signe $-$, $\varphi \circ f$ ne peut avoir en a ni maximum ni minimum.

Si enfin a est du type (III) on a :

$$(\varphi \circ f)(x_1, x_2, x_3) = a_0 + b_1 x_1 + b_2 (x_2^2 + x_1 x_3 - x_3^3) + c_1 x_1^2 + \dots$$

Si b_1 était nul, comme $x_2 = 0$ et $x_1 = 3x_3^2$ sur Σ , on aurait $\varphi \circ f | \Sigma = 2b_2 x_3^3 + \dots$ et a serait un point critique dégénéré pour $\varphi \circ f | \Sigma$. Donc $b_1 \neq 0$ et a n'est pas un point critique de $\varphi \circ f$, qui est donc bien une fonction de Morse.

COROLLAIRE. Toute application générique $f : M \rightarrow R^2$ doit présenter des points critiques de type (I).

En effet, on peut toujours trouver des fonctions $\varphi : R^2 \rightarrow R$ sans points critiques pour lesquelles $\varphi \circ f | \Sigma$ est une fonction de Morse. (cf. R. Thom [6]). Alors $\varphi \circ f$ est une fonction de Morse sur M qui, M étant compacte,

possède au moins un maximum et un minimum, qui sont atteints en des points critiques nécessairement du type (I).

2. Considérons une variété à n dimensions M , séparée à base dénombrable, sans bord, C^∞ , mais pas nécessairement compacte, et une *submersion* $f : M \rightarrow R^q$ à fibres compactes, c'est-à-dire que l'image réciproque $f^{-1}(b)$ de tout point $b \in R^q$ est compacte.

Les composantes connexes des fibres $f^{-1}(b)$ sont les feuilles d'un feuilletage \mathcal{F} de M . En effet, comme f est une submersion, pour tout $y \in M$ on peut trouver un voisinage U de Y avec un difféomorphisme φ de U sur le produit $D^q \times D^{n-q}$ de deux disques à q et $n - q$ dimensions, de manière que, p_1 désignant la projection de ce produit sur le premier facteur D^q , on ait $f|_U = p_1 \circ \varphi$. Si $b \in D^q$, et dans ce cas seulement, $f^{-1}(b)$ contient une feuille passant dans U et l'intersection $f^{-1}(b) \cap U = \varphi^{-1} \circ p_1^{-1}(b) = \varphi^{-1}(b \times D^{n-q})$ est connexe. Deux feuilles distinctes passant dans U ne peuvent appartenir à une même fibre de f , puisque f prend sur ces deux feuilles deux valeurs distinctes. Par suite, un point $y \in M$ ne peut adhérer à une feuille qui ne le contient pas. *Chaque feuille est ainsi un ensemble fermé, donc compact* puisque contenu dans un compact.

Si p_2 désigne la projection de $D^q \times D^{n-q}$ sur D^{n-q} , pour tout $c \in D^{n-q}$, $\varphi^{-1} \circ p_2^{-1}(c) = \varphi^{-1}(D^q \times c)$ est une sous-variété de U transversale aux feuilles, qui coupe toute feuille passant dans U en un point unique.

Nous allons montrer que les feuilles de \mathcal{F} sont les fibres d'une fibration localement triviale de M . A cet effet, introduisons sur M une métrique riemannienne et, étant donné une feuille C et un nombre $r > 0$; considérons l'ensemble $N(C, r)$ des couples (y, η) formés par un point $y \in C$ et un vecteur η tangent à M en y et orthogonal à C , de longueur $|\eta| < r$. Muni de la projection qui envoie (y, η) en $(y, 0)$, c'est un fibré dont les fibres sont des disques de dimension q . Pourvu que r soit assez petit, il existe dans M un arc géodésique unique d'origine y , tangent à η en y , orienté comme η et de longueur $|\eta|$. En désignant par $F(y, \eta)$ l'extrémité de cet arc, on définit une application $F : N(C, r) \rightarrow M$. Si r est assez petit, F est un difféomorphisme de $N(C, r)$ sur le voisinage V de C formé des points de M dont la distance à C est $< r$. A la projection de $N(C, r)$ qui envoie (y, η) en $(y, 0)$ correspond par F la projection p de V sur C qui envoie $F(y, \eta)$ sur y . La fibre $p^{-1}(y)$ est une sous-variété de V , difféomorphe au disque D^q , orthogonal à C en y , et l'on peut supposer r assez petit pour qu'elle soit transversale aux feuilles de \mathcal{F} en chacun de ses points, quel que soit $y \in C$. (Ces propriétés bien connues découlent, en tenant compte de la compacité de C ,

du théorème des fonctions implicites et du théorème d'existence relatif aux équations différentielles).

Ainsi, r étant choisi assez petit, V est un voisinage ouvert de C , muni d'une application $p : V \rightarrow C$ qui en fait un fibré de base C , dont les fibres $p^{-1}(y)$ sont transversales aux feuilles de \mathcal{F} . Comme f est une submersion, la restriction de f à $p^{-1}(y)$ est une immersion dans R^q , et nous pouvons encore supposer r assez petit pour que ce soit un plongement, quel que soit $y \in C$. Il existe alors un disque D^q de centre $f(y)$ dans R^q , contenu dans $f(p^{-1}(y))$ pour tout $y \in C$.

Considérons maintenant l'ouvert $W = V \cap f^{-1}(D^q)$, désignons par $p_1 = f|_W$ et $p_2 = p|_W$ les restrictions de f et de p à W . Pour tout $y \in C$, p_1 réalise un difféomorphisme de $p_2^{-1}(y)$ sur D^p , de sorte que pour tout $u \in D^p$, l'intersection $p_1^{-1}(u) \cap p_2^{-1}(y)$ se réduit à un point $z \in W$, pour lequel $p_1(z) = u$ et $p_2(z) = y$. Il en résulte que l'application de W sur $D^p \times C$ qui envoie z en $(p_1(z), p_2(z))$ est un difféomorphisme. Le feuilletage \mathcal{F} est par suite une fibration localement triviale, dont l'espace de base est l'ensemble \mathcal{F} lui-même, muni de la topologie d'espace quotient, la projection canonique $\pi : M \rightarrow \mathcal{F}$ envoyant chaque point sur la feuille qui le contient. L'application f détermine localement la structure différentiable de \mathcal{F} et définit globalement une immersion α de \mathcal{F} dans R^q , telle que $f = \alpha \circ \pi$.

Nous avons ainsi établi le théorème suivant, (analogue au « Théorème de la fibration » de R. Thom [7]: Une submersion qui est une application propre définit une fibration localement triviale).

THÉOREME I. *Soit M une variété différentiable de dimension n et $f : M \rightarrow R^q$ une submersion à fibres compactes. Les composantes connexes des fibres de f sont alors compactes, ce sont les fibres d'une fibration localement triviale de M , et il existe une immersion α de l'espace de base \mathcal{F} de cette fibration dans R^q telle que, π étant la projection de M sur \mathcal{F} , l'on ait $f = \alpha \circ \pi$.*

3. Nous allons considérer les applications génériques qui ne présentent pas de points singuliers du type (II), et que nous appellerons *applications génériques spéciales*. Remarquons que l'absence de points singuliers du type (II) entraîne que tous les points singuliers sont du type (I), puisqu'au voisinage d'un point singulier du type (III) se trouvent des points singuliers des types (I) et (II). Une application générique spéciale n'a donc que des points singuliers du type (I). Cette définition est également valable pour des applications dans une surface différentiable.

PROPOSITION. *Si f est une application générique spéciale de S^3 dans R^2 , le pli Σ de f est un cercle non noué.*

Pour établir cette proposition, il suffit de prouver que $\pi_1(S^3 - \Sigma)$ est isomorphe à Z , car en vertu du théorème de dualité d'Alexander, il en résultera que Σ se compose d'une seule courbe fermée simple et d'après le lemme de Dehn-Papakyriakopoulos, cette courbe ne sera pas nouée.

Si un point singulier est contenu dans une fibre $f^{-1}(b)$, il y est isolé et par suite $f^{-1}(b) \cap (S^3 - \Sigma)$ est compact. La restriction de f à $S^3 - \Sigma$ est alors une submersion à fibres compactes et l'on peut appliquer le théorème I: il existe une fibration localement triviale $\pi : S^3 - \Sigma \rightarrow \mathcal{F}$ à fibres compactes et connexes, et une immersion $\alpha : \mathcal{F} \rightarrow R^2$ telle que $f = \alpha \circ \pi$. L'espace de base \mathcal{F} est alors une surface ouverte.

Soit $x_0 \in S^3 - \Sigma$, $y_0 = \pi(x_0)$, $F = \pi^{-1}(x_0)$. Dans la suite exacte d'homotopie de la fibration π (cf. par exemple Hu [2], p. 152).

$$\dots \pi_2(\mathcal{F}, y_0) \rightarrow \pi_1(F, x_0) \rightarrow \pi_1(S^3 - \Sigma, x_0) \rightarrow \pi_1(\mathcal{F}, y_0) \dots$$

on a $\pi_2(\mathcal{F}, y_0) = 0$ parce que \mathcal{F} est une surface ouverte, $\pi_0(F, x_0) = 0$ et $\pi_1(F, x_0) = Z$ parce que F est un cercle, d'où la suite exacte:

$$0 \rightarrow Z \rightarrow \pi_1(S^3 - \Sigma, x_0) \rightarrow \pi_1(\mathcal{F}, y_0) \rightarrow 0$$

Montrons que l'image de $\pi_1(S^3 - \Sigma, x_0)$ dans $\pi_1(\mathcal{F}, y_0)$ se réduit à zéro. Cela entraînera $\pi_1(\mathcal{F}, y_0) = 0$ et $Z = \pi_1(S^3 - \Sigma, x_0)$, ce qui achèvera la démonstration.

Il s'agit donc de montrer que la projection $\pi(\gamma)$ dans \mathcal{F} de toute courbe γ fermée en x_0 dans $S^3 - \Sigma$ est homotope à zéro dans \mathcal{F} . Comme γ est homotope à zéro dans S^3 , l'application de S^1 dans $S^3 - \Sigma$ qui définit γ peut s'étendre en une application dans S^3 , $H : D^2 \rightarrow S^3$, du disque D^2 bordé par S^1 . On peut supposer que H est différentiable et transverse à Σ . Alors $H^{-1}(\Sigma)$ est un ensemble fini de points P_1, \dots, P_s . En modifiant éventuellement H au voisinage de ces points, on peut faire en sorte qu'il existe de petits disques D_i ($i=1, \dots, s$) intérieur à D^2 et deux à deux disjoints, D_i étant centré en P_i et $H(D_i)$ étant un disque, transverse à Σ , défini à l'aide de coordonnées adaptées à f en $H(P_i)$ par $(x_1=0, x_2^2 + x_3^2 \leq \varepsilon)$, l'image par H du bord de D_i étant la fibre γ_i définie par $(x_1=0, x_2^2 + x_3^2 = \varepsilon)$. Comme $\pi(\gamma_i)$ se réduit à un point de \mathcal{F} , on a une application \tilde{H} de D^2 dans \mathcal{F} égale à $\pi \circ H$ hors des D_i et constante égale à $\pi(\gamma_i)$ dans D_i , ce qui montre que $\pi(\gamma)$ est homotope à zéro dans \mathcal{F} . c.q.f.d.

THÉOREME II. *S'il existe une application générique spéciale de la variété close à 3 dimensions M dans le plan, le groupe fondamental de M est libre.*

La démonstration suit les mêmes lignes que celle de la proposition précédente. Si $f : M \rightarrow R^2$ est une application générique spéciale, sa restriction $f|_{M - \Sigma}$ est une submersion à fibres compactes et l'on peut écrire $f = \alpha \circ \pi$, où $\pi : M - \Sigma \rightarrow \mathcal{F}$ est une fibration localement triviale à fibres connexes compactes, \mathcal{F} une surface ouverte et $\alpha : \mathcal{F} \rightarrow R^2$ une immersion. Choisissons un point base x_0 dans $M - \Sigma$ en sorte que la fibre F de π passant par x_0 soit contenue dans une boule de M . En vertu des équations (I), il suffit de prendre x_0 assez voisin du pli. Soit $y_0 = \pi(x_0)$, $F = \pi^{-1}(y_0)$. On a encore la suite exacte:

$$0 \rightarrow \pi_1(F, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_1(M - \Sigma, x_0) \xrightarrow{\pi_*} \pi_1(\mathcal{F}, y_0) \rightarrow 0$$

ce qui entraîne

$$(1) \quad \pi_1(\mathcal{F}, y_0) = \pi_1(M - \Sigma, x_0) / \text{Im } i_*$$

Toute courbe fermée en x_0 dans M étant homotope à une courbe contenue dans $M - \Sigma$, l'inclusion $j : M - \Sigma \rightarrow M$ induit un homomorphisme surjectif $j_* : \pi_1(M - \Sigma, x_0) \rightarrow \pi_1(M, x_0)$, ce qui entraîne

$$(2) \quad \pi_1(M, x_0) = \pi_1(M - \Sigma, x_0) / \ker j_*$$

Ensuite, comme dans le cas de la proposition précédente, on voit que si une courbe γ fermée en x_0 dans $M - \Sigma$ est homotope à zéro dans M , son image $\pi(\gamma)$ est homotope à zéro dans \mathcal{F} , ce qui signifie que $\ker j_* \subset \ker \pi_* = \text{im } i_*$. D'autre part, comme F est contenu dans une boule de M , F est homotope à zéro dans M , ce qui signifie que $\text{im } i_* \subset \ker j_*$. Donc $\text{im } i_* = \ker j_*$, et, en vertu de (1) et (2), $\pi_1(M, x_0) = \pi_1(\mathcal{F}, y_0)$. Ce dernier groupe étant libre, le théorème II est établi.

4. Le théorème suivant, tout en permettant de retrouver le théorème II et la proposition du §3 sans utiliser le lemme de Dehn-Papakyriakopoulos, nous conduira à des résultats plus précis sur la structure des variétés M et de leurs applications génériques spéciales f .

THÉOREME III. a) *Soit M une variété close à trois dimensions et f une application générique spéciale de M dans R^2 . Le quotient de M par la relation d'équivalence qui identifie les points d'une même composante connexe des fibres de f est une surface compacte A avec un bord correspondant au pli Σ de f , et $f = \alpha \circ \pi$ où π est la projection de M sur A et α une immersion de A*

dans R^2 . De plus, M est le quotient d'un fibré en cercles localement trivial M' de base A par la relation d'équivalence qui identifie les points d'une même fibre du bord, la projection de M' sur M étant π' , sa projection sur A est $p = \pi \circ \pi'$.

b) Réciproquement, étant donné une surface compacte A , un fibré en cercles localement trivial M' de base A et une immersion α de A dans R^2 , le quotient de M' par la relation d'équivalence qui identifie les points d'une même fibre du bord est une variété M sur laquelle existe une structure différentiable telle que, π étant la projection de M sur A , l'application $\alpha \circ \pi$ de M dans R^2 soit générique spéciale.

Notons que A est nécessairement orientable, car, parmi les surfaces compactes, celles qui sont orientables et ont un bord, et celles-là seulement, admettent des immersions dans R^2 .

Démonstration. a) En vertu du théorème I, comme on a vu au début du §3, l'image de $M - \Sigma$ dans A est une surface ouverte \mathcal{F} , munie de la structure différentiable définie par la submersion $f | (M - \Sigma)$. D'autre part, chaque point a de Σ étant à lui seul une composante connexe d'une fibre de f , la restriction de π à Σ est un homéomorphisme sur $A - \mathcal{F}$. A l'aide de coordonnées adaptées à f en a , f est définie par les équations (I) du §1 : $y_1 = x_1, y_2 = x_2^2 + x_3^2$. Le voisinage $\{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < \varepsilon^2\}$ de a est appliqué sur le domaine $\{y_1^2 + y_2 < \varepsilon, y_2 > 0\}$, l'arc $x_2 = x_3 = 0$ de Σ venant sur l'arc $y_2 = 0$ du bord de ce domaine. Cela montre que A est bien une surface dont l'intérieur est $\mathring{A} = \mathcal{F}$ et dont le bord $A - \mathcal{F}$ est homéomorphe à Σ . De plus, en prenant y_1, y_2 comme coordonnées locales au voisinage du point $\pi(a)$ du bord de A , on définit une structure différentiable sur A qui prolonge celle de \mathcal{F} et telle que α soit une immersion.

D'après le théorème I, $M - \Sigma$ est un fibré en cercles localement trivial de base $\mathcal{F} = \mathring{A}$. La surface A est orientable, puisqu'elle admet une immersion α dans R^2 . En enlevant de A le long de chaque courbe de son bord un étroit ruban, on obtient une surface $A_1 \subset \mathring{A}$ difféomorphe à A . Ce difféomorphisme se relève en un isomorphisme du sous-fibré $p^{-1}(A_1)$ de $M - \Sigma$ sur un fibré M' de base A , dont l'intérieur est isomorphe à $M - \Sigma$. Il est clair qu'en réduisant à un point chaque fibre du bord de M' on retrouve M .

On voit qu'on passe de M à M' en faisant en quelque sorte éclater le pli de f : chaque courbe Γ de Σ est transformée en une surface qui est un fibré en cercles de base Γ . Si M est orientable, cette surface sera un tore, mais si M n'est pas orientable, ce pourra aussi être une bouteille de Klein. Ces surfaces forment le bord de M' .

b) Partant de A , α et M' , on forme M et on a les projections π , π' et $p = \pi \circ \pi'$ de M sur A , de M' sur M et de M' sur A . A chaque courbe C du bord de A correspond une surface $p^{-1}(C)$ du bord de M' et une courbe $\Gamma = \pi^{-1}(C) = \pi'(p^{-1}(C))$ dans M . Soit Σ la réunion des courbes Γ . La restriction de π' à l'intérieur de M' est un homéomorphisme sur $M - \Sigma$, qui définit une structure différentiable telle que $\pi|_{(M-\Sigma)}$ soit une submersion de $M - \Sigma$ sur A , de sorte que $f = \alpha \circ \pi$ n'a pas de points singuliers dans $M - \Sigma$.

Pour prolonger cette structure différentiable à toute la variété M , considérons un point a de l'une des courbes Γ et le point correspondant $\pi(a)$ du bord de A . On peut introduire dans A des coordonnées locales y_1, y_2 nulles en ce point, telles que $\{|y_1| < 1, 0 \leq y_2 < 1\}$ définisse un voisinage de $\pi(a)$ dans A , $\{|y_1| < 1, y_2 = 0\}$ étant l'image $\pi(L)$ dans le bord de A d'un arc L de Γ . On peut identifier ce voisinage de $\pi(a)$ au produit $L \times [0, 1[$ de L par l'intervalle $0 \leq y_2 < 1$. Comme le fibré M' est localement trivial, l'image réciproque de ce voisinage dans M' peut être représentée par $W = L \times [0, 1[\times S^1$, et son image $V = \pi'(W)$ est un voisinage de a dans M . Considérons alors l'application de la couronne $[0, 1[\times S^1$ sur le disque $D^2 = \{|z| < 1\}$ bordé par S^1 , définie en posant $z = \sqrt{y_2} e^{i\theta}$, et l'application correspondante μ de W sur $L \times D^2$ qui envoie $(y_1, y_2, e^{i\theta})$ en $(y_1, z = \sqrt{y_2} e^{i\theta})$. Toute fibre $y_1 \times 0 \times S^1$ de W dans le bord de M' étant réduite à un point $(y_1, 0)$, tandis que μ est injective ailleurs, on voit qu'il existe un homéomorphisme h de $L \times D^2$ sur V tel que $\pi'|_W = h \circ \mu$. La structure différentiable de $L \times D^2$ est alors transportée par h dans V , ce qui fournit le prolongement cherché. Prenons dans V les coordonnées locales x_1, x_2, x_3 définies à l'aide de h par $x_1 = y_1, x_2 = \operatorname{Re} z, x_3 = \operatorname{Im} z$, et prenons au voisinage de $f(a) = \alpha \circ \pi(a)$ dans R^2 les coordonnées locales y_1, y_2 définies à l'aide de α . Alors f est définie au voisinage de a par $y_1 = x_1, y_2 = x_2^2 + x_3^2$. Donc chaque point de Σ est un point singulier du type (I) et f est bien une application générique spéciale de M dans R^2 avec le pli Σ . c.q.f.d.

On déduit de là que le groupe fondamental de M est isomorphe à celui de A , qui est comme on sait le groupe libre de rang $r = 2g + b - 1$, où g est le genre de A et b le nombre des courbes de son bord. Mais nous allons obtenir un résultat plus précis.

Rappelons que la somme connexe de deux variétés closes M_1 et M_2 est une variété notée $M_1 \# M_2$ qu'on obtient en enlevant dans chacune d'elles l'intérieur d'une boule, ce qui fournit deux variétés bordées chacune par

une sphère, qu'on réunit ensuite en identifiant ces deux sphères (l'identification devant tenir compte des orientations dans le cas de variétés orientées). Les variétés et les boules étant supposées différentiables, le choix de ces dernières n'importe pas, et l'opération $\#$ est associative et commutative. La somme connexe $M_1 \# M_2$ est ainsi une variété qui peut être partagée par une sphère S en deux variétés qui sont changées en M_1 et M_2 lorsqu'on adjoint à chacune une boule de bord S .

Désignons par V_r la somme connexe de r copies de $S^2 \times S^1$, V_0 se réduisant à S^3 et V_1 à $S^2 \times S^1$, par V_1^* la variété non orientable quotient de $S^2 \times S^1$ par le groupe d'ordre 2 engendré par la transformation résultant d'une symétrie de S^2 par rapport à un plan diamétral combinée avec une symétrie de S^1 par rapport à son centre, et par V_r^* la somme connexe de V_1^* et de $r - 1$ copies de $S^2 \times S^1$.

THÉOREME IV. *Les variétés closes à 3 dimensions qui admettent des applications génériques spéciales dans R^2 sont les variétés V_r ($r=0, 1, 2, \dots$) et V_r^* ($r=1, 2, \dots$). Il n'y en a pas d'autres.*

Il est clair que V_r est orientable, tandis que V_r^* ne l'est pas. Leurs groupes fondamentaux $\pi_1(V_r)$ et $\pi_1(V_r^*)$ sont libres de rang r . Ce sont les seules variétés closes à 3 dimensions connues jouissant de cette propriété. Si la conjecture de Poincaré était établie, on serait assuré qu'il n'y en a pas d'autres. (cf. Milnor [4]).

Pour la démonstration, partons du théorème III, d'après lequel toute variété close à 3 dimensions M admettant une application générique spéciale f dans R^2 est associée à un fibré en cercles M' dont la base est une surface A et le groupe fondamental $\pi_1(M) = \pi_1(A)$ est libre de rang $r = g + b - 1$, g étant le genre de A et b le nombre des courbes du bord de A , d'ailleurs égal au nombre de courbes du pli de f . On sait d'autre part que le fibré M' est orientable si ses fibres peuvent être orientées d'une manière cohérente et dans ce cas M' est trivial: $M' = A \times S^1$.

Si M est simplement connexe, $r = g = 0$ et $b = 1$, A est un disque et le fibré $M' = A \times S^1$ est trivial. Pour voir que $M = S^3$, représentons S^3 par l'espace euclidien R^3 complété avec un point à l' ∞ , et A par un disque plan bordé par un cercle C . Par une inversion qui rejette un point de C à l' ∞ , on peut se ramener au cas où C est une droite et A un demi-plan limité par C . L'application $\pi' : A \times S^1 \rightarrow S^3$ qui envoie $(a, e^{i\theta})$, où $a \in A$ et $e^{i\theta} \in S^1$, sur le point x du cercle d'axe C passant par a tel que le demi-plan limité par C contenant x fasse un angle θ avec A ,

induit un homéomorphisme de $A \times S^1$ sur $R^3 - C$ et projette le fibré $C \times S^1$ sur C , de sorte que $M = S^3$.

Remarquons que si L est un arc joignant deux points de C dans A et délimitant avec C un domaine D , $\pi^{-1}(L)$ est une sphère qui borde la boule $\pi^{-1}(D)$ engendrée par la révolution de D autour de C .

Si $r = 1$, alors $g = 0$ et $b = 2$, A est une couronne, produit $A = C \times I$ d'un cercle C par un segment I . Soit M' un fibré en cercles de base A et $p : M' \rightarrow A$ sa projection. Pour tout $x \in I$, $p^{-1}(C \times x)$ est un fibré en cercles de base C , c'est donc un tore T ou une bouteille de Klein K , de sorte que $M' = T \times I$ ou $K \times I$. Pour tout $y \in C$, $p^{-1}(y \times I)$ est un fibré en cercles de base I , c'est donc une couronne $S^1 \times I$ et son image $\pi'(p^{-1}(y \times I))$ dans M est une sphère S^2 , puisque chacun des cercles bordant cette couronne y est réduit à un point. Par suite $M = \pi'(p^{-1}(C \times I))$ est un fibré en sphères de base C . Dans le cas où $M' = T \times I$, M est orientable, ce fibré en sphères est trivial et $M = C \times S^2 = S^1 \times S^2 = V_1$. Mais si $M' = K \times I$, M' et M ne sont pas orientables, le revêtement orientable à deux feuillet de K étant T , celui de $K \times I$ est $T \times I$ et celui de M est V_1 , de sorte que M est le quotient non orientable V_1^* de V_1 .

Pour traiter le cas $r > 1$, procédant par récurrence, nous admettons que les seules variétés M associées à des fibrés en cercles dont la base est une surface A_0 avec un groupe fondamental de rang $r - 1$ sont V_{r-1} et V_{r-1}^* . Or on sait que toute surface A dont le groupe fondamental est de rang r peut être obtenue à partir d'un disque en lui attachant successivement r anses, donc à partir d'une surface A_0 en lui attachant une anse. Attacher une anse à la surface A_0 , c'est lui adjoindre un quadrilatère B en identifiant deux côtés opposés de B à deux arcs disjoints du bord ∂A_0 de A_0 , de manière à obtenir une surface $A = A_0 \cup B$ orientable comme A_0 l'est supposée, l'intersection $A_0 \cap B$ se réduisant aux deux arcs de l'attachement. Si ces deux arcs appartiennent à la même courbe de ∂A_0 , A a le même genre que A_0 et ∂A contient une courbe de plus que ∂A_0 , tandis que s'ils appartiennent à deux courbes distinctes de ∂A_0 , le genre de A est supérieur d'une unité à celui de A_0 et le nombre des courbes de ∂A inférieur d'une unité au nombre des courbes de ∂A_0 . Dans l'un et l'autre cas, l'entier $r = g + b - 1$ est augmenté d'une unité et passe de $r - 1$ à r en allant de A_0 à A . (voir fig. 1).

Tout fibré en cercles M' de base A contient les deux sous-fibrés $M'_0 = p^{-1}(A_0)$ de base A_0 et $B' = p^{-1}(B)$ de base B . Inversément, en partant de fibrés en cercles M'_0 de base A_0 et B' de base B , on peut obtenir un fibré en cercles M' de base A en identifiant les fibres correspondant à un même

point des arcs d'attachement. Mais il faut tenir compte, dans cette identification, de l'orientation des fibres. Si M'_0 est orientable, ses fibres peuvent être orientées d'une manière cohérente, de même que celles de B' , et l'on peut supposer que ces orientations coïncident au dessus de l'un des arcs d'attachement, selon qu'alors elles coïncident ou non sur l'autre arc d'attachement, M' sera orientable ou non. Ainsi, à chaque fibré en cercles orientable M'_0 de base A_0 correspondent deux fibres en cercles M' de base A , l'un orientable et l'autre non orientable. Si M'_0 n'est pas orientable, M' ne le sera naturellement pas non plus.

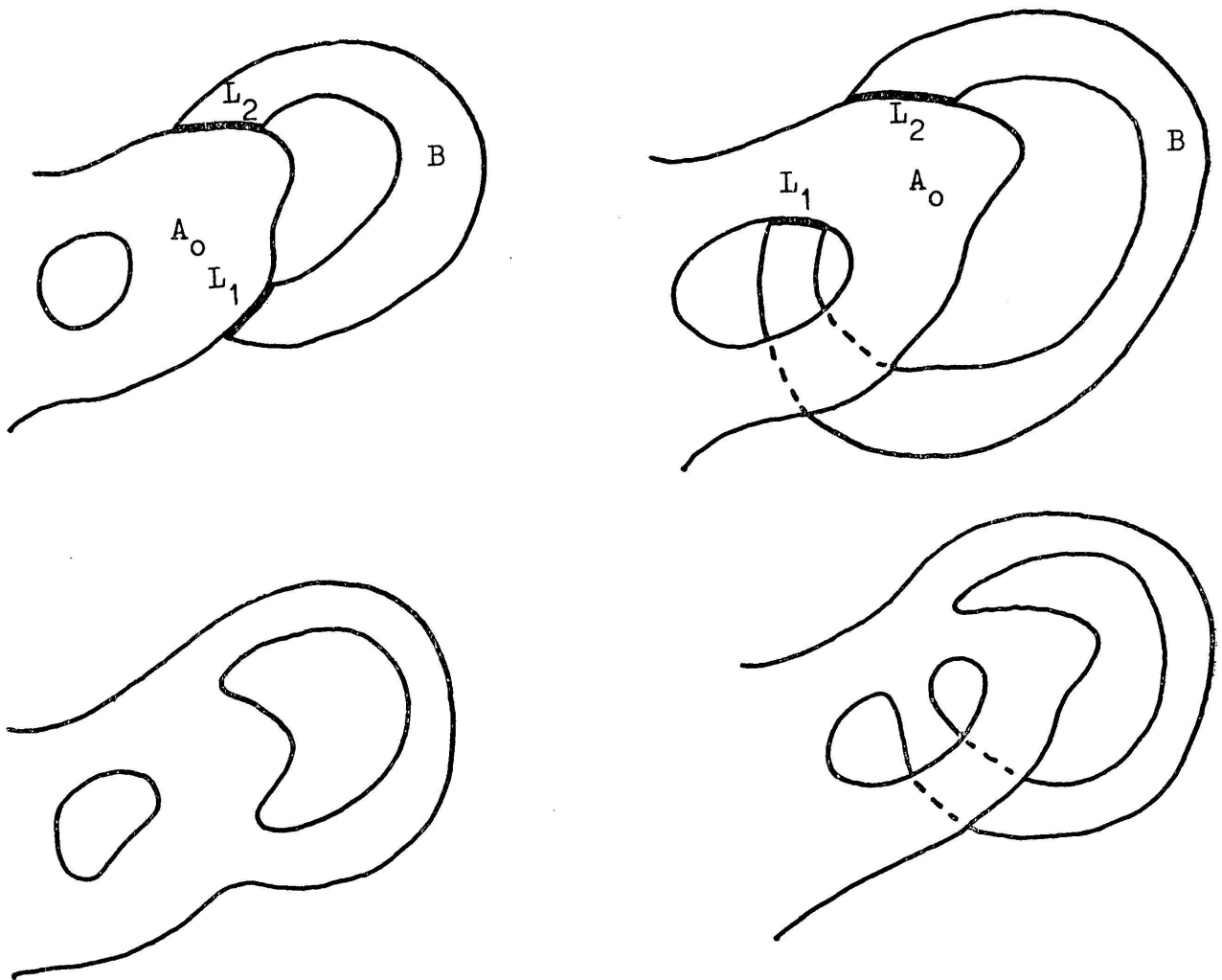


Fig. 1

A ces fibrés correspondent les variétés closes M et M_0 qui s'en déduisent en réduisant à un point chaque fibre du bord. Par l'hypothèse de récurrence, $M_0 = V_{r-1}$ ou V_{r-1}^* , selon qu'elle est orientable ou non. Pour établir le théorème IV, il suffira donc de montrer que, si $M_0 = V_{r-1}$, M est la somme connexe de M_0 et de V_1 ou de V_1^* selon que M est orientable ou non, et si $M_0 = V_{r-1}^*$, M est la somme connexe de M_0 et de V_1 .

A cet effet, nous montrerons d'abord que, dans tous les cas, M peut s'obtenir à partir de M_0 et de $S^2 \times I$ en enlevant de M_0 les intérieurs de deux boules et en identifiant les deux sphères bordant la variété restante avec celles bordant $S^2 \times I$. Désignons par π_0 la projection de M_0 sur A_0 , π étant toujours celle de M sur A , et par L_1 et L_2 les deux arcs d'attachement, qui sont en même temps deux côtés opposés du quadrilatère B (fig.1).

Les sphères $\pi^{-1}(L_1)$ et $\pi^{-1}(L_2)$ bordent $\pi^{-1}(A_0)$, ainsi que $\pi^{-1}(B)$. Comme $B' = S^1 \times B = S^1 \times I \times I$, on voit que $\pi^{-1}(B) = S^2 \times I$, car en réduisant à un point les fibres de $S^1 \times I$ correspondant aux extrémités de I on obtient une sphère S^2 . Il suffit alors de montrer que $\pi^{-1}(A_0)$ est homéomorphe à une variété qu'on déduit de $M_0 = \pi_0^{-1}(A_0)$ en enlevant les intérieurs de deux boules.

Pour cela, joignons les extrémités de L_1 et celles de L_2 par deux arcs intérieurs à A_0 , délimitant avec L_1 et L_2 deux disques disjoints D_1 et D_2 , et soit A_{00} la surface obtenue à partir de A_0 en enlevant les intérieurs de ces disques (fig. 2). Alors $\pi^{-1}(A_{00})$ se déduit de $\pi_0^{-1}(A_0)$ en enlevant les intérieurs des deux boules $\pi_0^{-1}(D_1)$ et $\pi_0^{-1}(D_2)$, d'autre part, $\pi^{-1}(A_{00})$ est homéomorphe à $\pi^{-1}(A_0)$, car il existe un homéomorphisme de A_{00} sur A_0 se réduisant à l'identité hors d'un voisinage de D_1 et D_2 qui s'étend en un homéomorphisme de $\pi^{-1}(A_{00})$ sur $\pi^{-1}(A_0)$.

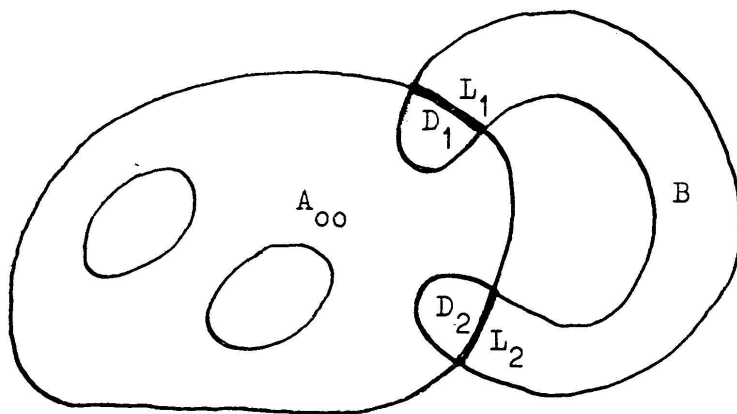


Fig. 2

Si M_0 est orientable, la variété M est orientable ou non selon que les orientations de $\pi^{-1}(L_1)$ et $\pi^{-1}(L_2)$ induites par une orientation de M_0 sont aussi induites par une même orientation de $\pi^{-1}(B)$ ou non, nous allons montrer que $M = M_0 \# V_1$ dans le premier cas et $M = M_0 \# V_1^*$ dans le second cas. De plus, nous verrons que si M_0 n'est pas orientable, ces

deux sommes connexes sont identiques, $M = M_0 \# V_1 = M_0 \# V_1^*$. Comme $M_0 = V_{r-1}$ ou V_{r-1}^* en vertu de l'hypothèse de récurrence, cela achèvera la démonstration.

Désignons par $B_1 = \pi_0^{-1}(D_1)$ et $B_2 = \pi_0^{-1}(D_2)$ les deux boules dont l'intérieur doit être enlevé de M_0 et les sphères qui les bordent identifiées à celles qui bordent $S^2 \times I$ pour former M . Joignons un point du bord de B_1 à un point du bord de B_2 par un arc L intérieur à M_0 . Paramétrons L sur l'intervalle $[0, 1]$ et I sur $[1, 2]$. On peut former un voisinage tubulaire de L dans M_0 , représenté par le produit $D^2 \times L = D_2 \times [0, 1]$ de L avec un disque D^2 , de manière que $D^2 \times 1$ soit contenu dans le bord de B_1 et $D^2 \times 0$ dans le bord de B_2 . La réunion de B_1 et B_2 avec ce voisinage tubulaire est une boule topologique, en forme d'haltère, bordée par une sphère S . C'est l'intérieur de cet haltère que nous enlevons de M_0 pour obtenir l'une des variétés bordées par S dans M . L'autre partie de M bordée par S est la réunion du voisinage tubulaire $D^2 \times [0, 1]$ avec $\pi^{-1}(B) = S^2 \times [1, 2]$, où $D^2 \times 1$ et $D^2 \times 0$ sont identifiés avec des disques contenus respectivement dans les bords $S^2 \times 1$ et $S^2 \times 2$ de $\pi^{-1}(B)$. Considérons D^2 comme inclus dans S^2 , le voisinage tubulaire est alors inclus dans $S^2 \times [0, 1]$ et les identifications ci-dessus se prolongent en identifications de $S^2 \times 1$ et $S^2 \times 0$ avec les sphères bordant $\pi^{-1}(B)$, les extrémités 1, 0 de $[0, 1]$ étant identifiées avec celles 1, 2 de $[1, 2]$ la réunion de $[0, 1]$ et $[1, 2]$ forme un cercle S^1 et celle de $S^2 \times [0, 1]$ avec $S^2 \times [1, 2]$ un fibré en sphères de base S^1 . Le second morceau de M bordé par S se déduit de ce fibré en sphères en enlevant l'intérieur de la boule $(S^2 - D^2) \times [0, 1]$. Ce fibré en sphères de base S^1 ne peut être que $S^2 \times S^1$ ou son quotient non orientable. Si M_0 est orientable, ce sera le premier ou le second selon que M est orientable ou non. Si M_0 n'est pas orientable, M ne l'est pas non plus, mais ce fibré en sphères de base S^1 pourra être orientable ou non selon le choix de l'arc L dont on a pris un voisinage tubulaire, car on peut trouver deux chemins L_1 et L_2 joignant les mêmes points dans M_0 , tels que les orientations de leurs voisinages tubulaires concordent à l'une des extrémités et pas à l'autre. La démonstration du théorème IV est ainsi achevée.

Disons que deux applications génériques spéciales f et f_1 de M dans R^2 appartiennent à la même classe, si les fibrés en cercles qui leur sont associés selon le théorème IIIa sont isomorphes. Si π et π_1 sont les projections correspondantes de M sur les surfaces A et A_1 bases de ces fibrés, cela signifie qu'il existe des difféomorphismes h_1 de A sur A_1 et h de M sur M tels que $\pi_1 \circ h^{-1} = h_1 \circ \pi$. Si alors $f = \alpha_0 \circ \pi$ et $f_1 = \alpha_1 \circ \pi_1$, on a

$f_1 = \alpha_1 \circ h_1 \circ \pi \circ h$, et comme $\alpha_1 \circ h_1$ est une immersion de A dans R^2 , on voit que toutes les applications génériques de la même classe que f seront données par l'expression $\alpha \circ \pi \circ h$, où α est une immersion arbitraire de A dans R^2 et h un automorphisme arbitraire de M .

Si M est orientable, $M = V_r$, le fibré en cercles M' étant trivial, à chaque surface A dont le groupe fondamental est de rang r correspond une et une seule classe. A est déterminée, à un difféomorphisme près, par le nombre b des courbes de son bord, qui est aussi le nombre des courbes du pli des applications de cette classe, et, puisque $r = 2g + b - 1$, doit satisfaire aux conditions

$$b \equiv r + 1 \pmod{2}, 1 \leq b \leq r + 1 \quad (1)$$

D'où:

THÉOREME V. *Les applications génériques spéciales de V_r dans R^2 se répartissent en $\lfloor \frac{r}{2} \rfloor + 1$ classes, correspondant aux entiers b satisfaisant aux conditions (1). Toutes les applications d'une même classe sont données par l'expression $\alpha \circ \pi \circ h$, où $\pi : V_r \rightarrow A$ est la projection associée à l'une d'entre elles, h un automorphisme arbitraire de V_r et α une immersion arbitraire de A dans R^2 .*

Si M est non orientable, $M = V_r^*$, supposons donné un fibré en cercle M' de base A et la projection associée $\pi : M \rightarrow A$ définissant une classe d'applications génériques spéciales de M dans R^2 . Le revêtement orientable à deux feuillets \hat{M} de M est associé à un sous-groupe d'indice 2 de $\pi_1(M)$ auquel correspond par l'isomorphisme $\pi_1(M) \simeq \pi_1(A)$ un sous-groupe d'indice 2 de $\pi_1(A)$ et un revêtement à 2 feuillets \hat{A} de A , et il y a une projection $\hat{\pi} : \hat{M} \rightarrow \hat{A}$ telle que, p_1 et p_2 désignant les projections de revêtement de \hat{A} sur A et de \hat{M} sur M , $p_1 \circ \pi = \pi \circ p_2$. Le fibré en cercles \hat{M}' associé à \hat{M} et $\hat{\pi}$ est le revêtement orientable à 2 feuillets de M' , il est trivial, $\hat{M}' = \hat{A} \times S^1$ et la transformation de revêtement, qui renverse l'orientation, résulte (à une isotopie près) de la transformation de revêtement de \hat{A} combinée avec la symétrie de S^1 par rapport à un diamètre.

Inversément, supposons donné un revêtement à 2 feuillets \hat{A} de la surface compacte A , orientable avec bord, $\pi_1(A)$ étant de rang r . Le quotient de $\hat{M}' = \hat{A} \times S^1$ par le groupe d'ordre 2 engendré par la transformation définie ci-dessus est un fibré en cercles non orientable M' , la projection de

\hat{M}' sur \hat{A} induit une projection π de la variété $M = V_r^*$ sur A qui définit une classe d'applications génériques spéciales de M . Ainsi, les classes de ces applications correspondent aux revêtements à deux feuilletés de A , qui eux-mêmes correspondent aux sous-groupes d'indice 2 de $\pi_1(A)$.

Un sous-groupe d'indice 2 est toujours invariant et contient le sous-groupe des commutateurs, il est donc déterminé par un sous-groupe d'indice 2 du groupe d'homologie $H_1(A)$, et il suffit de considérer, l'homologie (mod 2), de sorte que $H_1(A)$ est le produit direct de r groupes d'ordre 2. Ce sous-groupe d'indice 2 est le noyau d'un homomorphisme χ de $H_1(A)$ sur le groupe multiplicatif $(1, -1)$ qu'on appellera *le caractère du revêtement*. Pour toute courbe fermée C dans A , désignons par $\chi(C)$ l'image ± 1 de sa classe d'homologie. Si C_1, C_2, \dots, C_b sont les courbes du bord de A , comme leur somme est homologue à zéro, le nombre de celles pour lesquelles $\chi(C_i) = -1$ doit être pair. Soit $2c$ ce nombre. Si le genre g de A est nul, c'est-à-dire si $b = r + 1$, alors $c \neq 0$ sinon, comme les C_i engendrent $H_1(A)$, χ ne prendrait jamais la valeur -1 . On a donc :

$$1 < c \leq \frac{b}{2} \quad \text{si } g = 0 \quad \text{et} \quad 0 \leq c \leq \frac{b}{2} \quad \text{si } g > 0 \quad (2)$$

Deux sous-groupes d'indice 2 de $H_1(A)$ qui sont conjugués par un automorphisme de A correspondent à la même classe d'applications génériques spéciales de M dans R^2 . Nous dirons alors que les caractères correspondants sont *équivalents*. Il est clair que le nombre c aura la même valeur pour deux caractères équivalents. Nous allons montrer que réciproquement, si c a la même valeur, les deux caractères sont équivalents. Remarquons encore que les courbes C_i de ∂A pour lesquelles $\chi(C_i) = -1$ correspondent aux surfaces non orientables (bouteilles de Klein) qui bordent M' et aux courbes du pli de π qui n'ont pas de voisinage orientable.

THÉOREME VI. *A chaque couple d'entiers b, c satisfaisant aux conditions (1) et (2) correspond une classe d'applications génériques spéciales de V_r^* dans R^2 , et inversement ; b est le nombre des courbes du pli des applications de la classe et $2c$ le nombre de ces courbes qui n'ont pas de voisinage orientable.*

Soient C_i ($i = 1, 2, \dots, b$) les courbes du bord de la surface orientable A . D'après ce qui précède, pour établir ce théorème, il suffit de montrer qu'à chaque entier c satisfaisant à (2) correspondent des caractères χ qui sont tous équivalents. Comme toute permutation des C_i peut être induite par un automorphisme de A , on peut se borner à considérer les χ tels que $\chi(C_i) = -1$ pour $1 \leq i \leq 2c$ et $\chi(C_i) = 1$ pour $i > 2c$.

Supposons d'abord $c = 0$. Alors $g > 0$ et l'on peut trouver sur A une courbe fermée simple Γ non homologue à une combinaison des C_i . En posant pour toute courbe fermée C transversale à Γ , $\chi(C) = 1$ ou -1 selon que le nombre des points d'intersection de C avec Γ est pair ou impair, on définit un caractère χ satisfaisant à la condition $c = 0$. Il résulte des propriétés topologiques bien connues des surfaces que tout autre caractère χ' satisfaisant à cette même condition peut être défini de la même manière à partir d'une autre courbe Γ' analogue à Γ , et comme Γ' peut être changée en Γ par un automorphisme de A , χ et χ' sont équivalents. On peut construire le revêtement à 2 feuillets associé à χ en prenant deux exemplaires de la surface A coupée le long de Γ et en les recollant de manière à former une ligne de croisement au-dessus de Γ .

Supposons maintenant $c > 0$. Soient L_i ($i = 1, 2, \dots, c$) c arcs simples deux-à-deux disjoints, L_i joignant C_{2i-1} à C_{2i} à l'intérieur de A . En posant, pour toute courbe fermée C transversale à $L = L_1 + L_2 + \dots + L_c$, $\chi(C) = 1$ ou -1 selon que le nombre des points d'intersection de C avec L est pair ou impair, on définit un caractère satisfaisant aux conditions requises. C'est le seul pour lequel $\chi(C) = 1$ pour toute courbe fermée ne coupant pas L , et si $g = 0$ il n'y en a pas d'autre. Mais si $g > 0$, on voit, comme dans le cas $c = 0$, que tout autre caractère χ' peut être défini à l'aide d'une courbe fermée simple Γ non homologue à une combinaison des C_i et ne coupant pas les L_i , en posant, pour toute courbe fermée C transversale à $\Gamma + L$, $\chi'(C) = 1$ ou -1 selon que le nombre de points d'intersection de C avec $\Gamma + L$ est pair ou impair. On peut ensuite trouver un arc L'_1 ayant les mêmes extrémités que L_1 , ne coupant pas les autres arcs L_i , tel que $L'_1 - L_1$ soit homologue à Γ , et l'on voit que χ' peut aussi être défini par la condition que, pour toute courbe fermée C transversale à $L' = L'_1 + L_2 + \dots + L_c$, $\chi'(C) = 1$ ou -1 selon que le nombre des points d'intersection de C avec L' est pair ou impair. Comme L' peut être changé en L par un automorphisme de A , χ' est équivalent à χ . Remarquons encore pour terminer que le revêtement à 2 feuillets associé à χ peut être construit en prenant deux exemplaires de la surface A coupée le long des L_i et en les recollant de manière à former une ligne de croisement au-dessus de chacun des L_i .

REMARQUES.

Dans [5], F. Raymond a classé les actions de S^1 sur les variétés à 3 dimensions. Il se trouve que, dans le cas des variétés orientables V_n , les classes d'applications génériques spéciales sont en bijection avec les classes

d'actions de S^1 pour lesquelles il y a des points fixes et pas d'orbites singulières. Effectivement, à l'aide du théorème II, il est facile de construire une action correspondante de S^1 sur V_r .

D'après les théorème V et VI seules quelques variétés très particulières admettent des applications génériques sans points singuliers du type (II) et (III) dans le plan.

Il n'en est plus de même lorsqu'on considère les applications génériques pouvant présenter des points singuliers du type (I) et (II).

En effet, des travaux de H. Levine [3], il résulte que toute variété close à trois dimensions admet une application générique dans le plan dont le pli comporte deux composantes connexes, l'une formée de points singuliers du type (I) et l'autre formée de points singuliers du type (II).

Citons pour terminer le travail de diplôme de M. Bina-Motlagh [1] où figurent de nombreux exemples d'applications génériques de S^3 dans le plan.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BINA-MOTLAGH, M. *Sur certaines applications génériques de S^3 dans le plan*, travail de diplôme, Université de Lausanne (1973).
- [2] HU, S. T. *Homotopy Theory*. Academic Press (1959).
- [3] LEVINE, H. Elimination of cusps. *Topology*, Vol. 3 (1965) *supplément 1 et 2*, p. 263.
- [4] MILNOR, J. A unique decomposition theorem for 3-manifolds. *Amer. J. Math.* 84 (1942).
- [5] RAYMOND, F. Classification of the action of the circle on 3-manifolds. *Transactions of the A.M.S.* Vol. 131, No. 1 (1968), pp. 51-78.
- [6] THOM, R. Singularités d'applications différentiables. *Annales de l'Institut Fourier*, Tome VI (1955-1956), p. 45.
- [7] — Les classes caractéristiques de Pontryagin des variétés triangulées. *Symposium Internacional de Topologia Algebraica*. Mexico 1958.
- [8] WHITNEY, H. On singularities of mappings of euclidean spaces. *Ann. of Math.* 62 (1955), p. 374.

(Reçu le 20 août 1974)

O. Burlet et G. de Rham

Institut de Mathématiques
Université de Lausanne, Dorigny
CH-1015 Lausanne