Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 20 (1974)
Heft: 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LA CYCLOTOMIE JADIS ET NAGUÈRE
Autor: Weil, André
Bibliographie
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-46909

19. On peut appliquer les résultats cités au n° 18, sur les fonctions zêta des variétés $\sum a_i X_i^m = 0$ (et, notons-le en passant, de toutes les variétés qu'on peut définir comme quotients de ces dernières par des groupes finis d'automorphismes) au calcul des fonctions zêta de ces mêmes variétés sur des corps de nombres algébriques. On trouve que ces fonctions sont des produits de fonctions L de Hecke, ce qui revient à dire que les sommes de Jacobi définissent des caractères de Hecke dans les corps cyclotomiques. Comme on l'a vu au n° 16, un cas particulier important (relatif aux sommes $(-G)^l$, où G est une somme de Gauss d'ordre l premier impair) formait le fond de la démonstration d'Eisenstein pour sa loi de réciprocité. En fait, il s'agit là d'un résultat très général sur les caractères de Hecke « cyclotomiques » dans tous les corps abéliens sur $\mathbf{Q}$ (cf. [9 b, c]); naturellement, ce sont les corps totalement imaginaires qui sont intéressants de ce point de vue.

Une fois obtenus ces caractères, on peut se proposer d'étudier les fonctions L de Hecke qui leur correspondent, et notamment leurs valeurs $L(s)$ pour s entier. Il y a lieu de citer à ce sujet un résultat remarquable de Chowla et Selberg (v. [10]); convenablement interprété, celui-ci fait voir que la valeur, en $s = 1$, de la fonction L définie par un certain caractère « cyclotomique » sur $\mathbf{Q}(\sqrt{-n})$ (pour n premier $\equiv 3 \bmod 4$, c'est celui même qu'on a défini d'après Cauchy au n° 9) s'exprime élémentairement au moyen de π et des valeurs de la fonction $\Gamma(s)$ pour $s = a/n$, $0 < a < n$. On pourrait sans doute aller beaucoup plus loin dans cette voie.

BIBLIOGRAPHIE

[1] LAGRANGE. (a) Réflexions sur la résolution algébrique des équations, *Nouveaux Mém. de l'Acad. R. des Sc. et B.-L. de Berlin, 1770-1771* = *Oeuvres*, vol. III, p. 332;
(b) Traité de la résolution numérique des équations. 2e éd., Paris 1808, Notes XIII-XIV = *Oeuvres*, vol. VIII, p. 295-367.

[2] GAUSS. (a) Disquisitiones arithmeticae. 1801 = *Werke*, vol. I;
(b) Summatio serierum quorundam singularium. 1811 = *Werke*, vol. II, p. 11;
(c) Theorematis fundamentalis in doctrina de residuis quadraticis demonstrationes et ampliationes novae, 1818 = *Werke*, vol. II, p. 51;
(d) Theoria residuorum biquadraticorum. *Commentatio prima*, 1828 = *Werke*, vol. II, p. 65;
(e) Disquisitionum circa aequationes puras ulterior evolutio. *Werke*, vol. II, p. 243.

[3] JACOBI. (a) Briefe an Gauss. *Werke*, vol. VII, p. 391-400;
(b) Über die Kreistheilung und ihre Anwendung auf die Zahlentheorie. *Berl. Monatsber.* 1837, p. 127 = *Crelles J. Vol. 30* (1846), p. 166 = *Werke*, vol. VI, p. 254.

[4] CAUCHY. Mémoire sur la Théorie des Nombres. *Mém. Ac. Sc.* XVII (1840) = *Oeuvres* (I), vol. III.

[5] Eisenstein. (a) Beweis des Reciprocitätssatzes für die cubischen Reste in der Theorie der aus dritten Wurzeln der Einheit zusammengesetzten complexen Zahlen. *Crelles J. 27* (1844), p. 289;

(b) Beweis der allgemeinsten Reciprocitätsgesetze zwischen reellen und complexen Zahlen. *Monatsber. d. k. Akad. d. Wiss. zu Berlin*, 1850, p. 189.

[6] Kummer. Ueber die Ergänzungssätze zu den allgemeinen Reciprocitätsgesetzen. *Crelles J. 44* (1851), p. 93.

[7] Stickelberger, L. Ueber eine Verallgemeinerung der Kreistheilung. *Math. Ann. 37* (1890), p. 321.

[8] Davenport, H. und H. Hasse. Die Nullstellen der Kongruenzzetafunktionen in gewissen zyklischen Fällen, *Crelles J. 172* (1935), p. 151.

[9] Weil, A. (a) Numbers of solutions of equations in finite fields. *Bull. Am. Math. Soc. 55* (1949), p. 197;

(b) Jacobi sums as „Grössencharaktere". *Trans. Am. Math. Soc. 73* (1952), p. 487;

(c) Sommes de Jacobi et caractères de Hecke. *Gött. Nachr.* (à paraître).

[10] Selberg, A. and S. Chowla. On Epstein's Zeta-Function. *Crelles J. 227* (1967), p. 86.

(Reçu le 22 juin 1974)

André Weil

The Institute for Advanced Study
Princeton, N.J., 08540