

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 19 (1973)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** SUR LE CONTRÔLE OPTIMAL DE SYSTÈMES DISTRIBUÉS  
**Autor:** Lions, J. L.  
**Kapitel:** 6.3. Problèmes de temps d'arrêt optimal  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-46289>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 27.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

$$(6.41) \quad \int_0^T \left[ - \left( \frac{\partial v}{\partial t}, v-u \right)_\lambda + b_\lambda(t; u, v-u) - (f, v-u)_\lambda \right] dt \geq 0$$

$$\forall v \in \mathcal{V}, \text{ tel que } v \leq M(u).$$

On montre encore (cf. Bensoussan, Lions [3]) l'existence d'une solution  $u \geq 0$  de (6.40) (6.41) lorsque  $f$  est donnée  $\geq 0$ .

Le principe d'une démonstration est d'utiliser un processus d'itération analogue à (6.35) mais où l'on doit alors régulariser  $M$  de façon convenable (pour que l'inéquation variationnelle correspondante admette une solution forte). Une autre démonstration repose sur la méthode des différences finies.

### Remarque 6.3.

Naturellement on rencontre les problèmes analogues en dimension quelconque d'espace — la dimension de l'espace correspondant au nombre de biens à gérer. On rencontre aussi de nombreuses autres fonctionnelles  $M$  correspondant à diverses situations économiques. Nous renvoyons à Bensoussan, Lions [2]; on trouvera dans M. Goursat [1] l'étude de l'approximation numérique de la solution de ces inéquations quasi variationnelles.

### Remarque 6.4.

Les inéquations variationnelles, stationnaires ou d'évolution, interviennent dans de nombreux problèmes de Physique et de Mécanique (cf. Duvaut, Lions [1] et la bibliographie de ce livre, C. Baiocchi et E. Magenes [1], H. Brezis et G. Duvaut [1], H. Brezis et G. Stampacchia [1]).

## 6.3. Problèmes de temps d'arrêt optimal

On a montré dans Bensoussan-Lions [1] comment des problèmes de temps d'arrêt optimal se ramènent à l'étude d'inéquations variationnelles du type suivant:

$$(6.42) \quad - \left( \frac{\partial v}{\partial t}, v-u \right)_\lambda + b_\lambda(t; u, v-u) \geq (f, v-u)_\lambda, \forall v \in K_1$$

où

$$(6.43) \quad K_1 = \{v \mid v \leq 0 \text{ p.p.}, v \in V_\lambda\},$$

avec:

$$(6.44) \quad u(t) \in K_1$$

et une condition de croissance pour  $\|u(t)\|_\lambda$  lorsque  $t \rightarrow +\infty$  ( $\|u(t)\|_\lambda$  doit croître moins vite qu'une exponentielle convenable).

On a montré que ce problème admet une solution unique.

### Remarque 6.5.

Pour un problème analogue en théorie des jeux, nous renvoyons à A. Friedman [1]. Pour des résultats supplémentaires de régularité, cf. A. Friedman [2].

## BIBLIOGRAPHIE

- BAIOCCHI, C. et E. MAGENES. [1] Problemi di frontiera libera in idraulica. *Colloque in Metodi valutativi nella fisica matematica. Accad. Naz. Lincei* (1972).
- BALAKRISHNAN, A. V. et J. L. LIONS. [1] State information for infinite dimensional systems. *Computation and System Sciences, 1* (1967), 391-403.
- BARANGER, J. [1] Existence de solutions pour des problèmes d'optimisation non convexe. *J. Math. P. et Appl.* (1973).
- BENSOUSSAN, A. [1] *Filtrage optimal des systèmes linéaires*. Paris Dunod, (1971).
- [2] On the separation principle for distributed parameter systems. *Banff*. (June 1971).
- BENSOUSSAN, A., M. GOURSAT et J. L. LIONS. [1] *Note C. R. Acad. Sc. Paris*, Mai 1973.
- BENSOUSSAN, A. et J. L. LIONS. [1] Problèmes de temps d'arrêt optimal et inéquations variationnelles paraboliques. *Applicable Analysis* (1973). *A paraître*.
- [2] *Note C.R. Acad. Sc. Paris*, Mai 1973.
- [3] *Note C.R. Acad. Sc. Paris*, Juin 1973.
- BENSOUSSAN, A. et R. TEMAN. [1] Equations aux dérivées partielles stochastiques non linéaires (1). *Israel J. of Math.* 11 (1972), 95-130.
- BERKOWITZ, L. D. [1] *A paraître*.
- BIDAUT, M. F. [1] Thèse, Paris (1973).
- BISMUT, J. M. [1] Thèse, Paris (1973).
- BRAUNER, C. M. et P. PENEL. [1] *Sur le contrôle optimal de systèmes non linéaires de biomathématiques*. Thèse 3<sup>e</sup> cycle, Paris (1972).
- BREZIS, H. [1] *A paraître*.
- [2] Problèmes unilatéraux. *J. Math. P. et Appl.* 51 (1972), 1-168.
- BREZIS, H. et G. DUVAUT. [1] *C. R. Acad. Sc. Paris* (1973).
- BREZIS, H. et G. STAMPACCHIA. [1] *C. R. Acad. Sc. Paris* (1973).