

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 19 (1973)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** SUR LE CONTRÔLE OPTIMAL DE SYSTÈMES DISTRIBUÉS  
**Autor:** Lions, J. L.  
**Kapitel:** 6.2. Réduction à une inéquation quasi variationnelle d'évolution  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-46289>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 27.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

$$(6.13) \quad w(x, T) = 0.$$

Nous allons maintenant montrer comment les égalités et inégalités (6.9) ... (6.13), caractérisent la fonction  $w$  (pourvu d'ajouter des conditions de croissance à l'infini en  $x$  sur  $w$ ). L'*unicité* résulte des raisonnements probabilistes conduisant aux inégalités précédentes. On donne seulement dans la suite des indications sur l'*existence* d'une solution.

## 6.2. Réduction à une inéquation quasi variationnelle d'évolution

On introduit:

$$(6.14) \quad u = \frac{w}{N(t)}.$$

Les conditions (6.9) ... (6.13) deviennent:

$$(6.15) \quad u(x, t) \leq 1 + \inf_{\xi \geq 1} u(x + \xi, t)$$

$$(6.16) \quad -\frac{\partial u}{\partial t} + A(t)u \leq f(x, t), \quad f(x, t) = \frac{l(x)}{N(t)},$$

$$(6.17) \quad u(x, t) = 1 + \inf_{\xi \geq 1} u(x + \xi, t), \quad x \leq \Sigma_1(t),$$

$$(6.18) \quad -\frac{\partial u}{\partial t} + A(t)u = f \quad \text{pour } x > \Sigma_1(t),$$

$$(6.19) \quad u(x, T) = 0,$$

où  $A(t)$  est défini par:

$$(6.20) \quad A(t)\varphi = -\frac{1}{2}\sigma^2(t)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \mu(t)\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{N'(t)}{N(t)}\varphi.$$

On va maintenant transformer (6.15) ... (6.19) en une inéquation quasi variationnelle.

### Remarque 6.1.

La transformation simple (6.14) a pour *seul* but de transformer (6.9) en (6.15). La condition (6.9) conduit à introduire l'ensemble des fonctions  $\varphi$  sur  $\mathbf{R}$ , à croissance convenable à l'infini, et telles que:

$$(6.21) \quad \varphi(x) \leq N(t) + \inf_{\xi \geq 0} \varphi(x + \xi),$$

ensemble qui dépend de  $t$ ; sous la forme (6.15), cela revient à prendre  $N(t) = 1$  dans (6.21) et l'ensemble correspondant ne dépend plus de  $t$ ; cette simplification est techniquement utile.

On va utiliser des espaces fonctionnels hilbertiens contenant des poids choisis de manière que  $l(x)$  appartienne à ces espaces.

Pour  $\lambda > 0$ <sup>1)</sup>, on pose:

$$(6.22) \quad m_\lambda(x) = \exp(-\lambda |x|)$$

et l'on introduit:

$$(6.23) \quad H_\lambda = \{\varphi \mid m_\lambda \varphi \in L^2(\mathbf{R})\},$$

$$(6.24) \quad V_\lambda = \{\varphi \mid \varphi \in H_\lambda, \frac{d\varphi}{dx} \in H_\lambda\};$$

l'espace  $H_\lambda$  est un Hilbert pour la norme  $\|m_\lambda \varphi\| = \|\varphi\|_\lambda$  (où  $\|m_\lambda \varphi\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} m_\lambda^2(x) \varphi(x)^2 dx$ ) et  $V_\lambda$  est un Hilbert pour la norme:

$$(6.25) \quad \|\varphi\|_\lambda = \left( \|\varphi\|_\lambda^2 + \left\| \frac{d\varphi}{dx} \right\|_\lambda^2 \right)^{1/2}.$$

Pour  $u, v \in V_\lambda$ , on pose:

$$(6.26) \quad \left| \begin{aligned} b_\lambda(t; u, v) &= \frac{1}{2} \sigma^2(t) \int_{\mathbf{R}} m_\lambda^2 \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} dx - \lambda \sigma^2(t) \int_{\mathbf{R}} m_\lambda^2 \frac{x}{|x|} \left( \frac{du}{dx} \right) v dx \\ &+ \mu(t) \int_{\mathbf{R}} m_\lambda^2 \left( \frac{du}{dx} \right) v dx - \frac{N'(t)}{N(t)} \int_{\mathbf{R}} m_\lambda^2 u v dx. \end{aligned} \right.$$

On vérifie que  $u, v \rightarrow b_\lambda(t; u, v)$  est une forme bilinéaire continue sur  $V_\lambda$  et on a fait ce qu'il fallait pour avoir:

$$(6.27) \quad b_\lambda(t; u, v) = \int_{\mathbf{R}} m_\lambda^2 (Au) v dx$$

(si par exemple  $v$  est à support compact et  $u$  assez régulière).

On introduit:

$$(6.28) \quad \left| \begin{aligned} M(\varphi)(x) &= 1 + \inf_{\xi \geq 0} \varphi(x + \xi), \\ K &= \{\varphi \mid \varphi \in V_\lambda, \varphi(x) \leq M(\varphi)(x)\} \end{aligned} \right.$$

<sup>1)</sup> On pourra prendre  $\lambda$  arbitrairement petit.

ce qui définit un ensemble convexe fermé non vide de  $V_\lambda$ .

On considère alors l'« inéquation quasi variationnelle d'évolution » suivante : trouver une fonction  $t \rightarrow u(t)$  de  $[0, T] \rightarrow V_\lambda$ , telle que :

$$(6.29) \quad u(t) \in K \text{ p.p.,}$$

$$(6.30) \quad - \left( \frac{\partial u}{\partial t}(t), v - u(t) \right)_\lambda + b_\lambda(t; u(t), v - u(t)) \geq (f(t), v - u(t))_\lambda, \quad \forall v \leq M(u)$$

$$(6.31) \quad u(T) = 0.$$

*Remarque 6.2.*

Il s'agit d'une « quasi inéquation » — l'inéquation variationnelle correspondant au convexe  $K$  étant obtenue lorsque dans (6.30) on prend  $v$  dans  $K$ , i.e.  $v \leq M(v)$  (au lieu de  $v \leq M(u)$ ).

On va maintenant donner quelques indications brèves sur la solution de la quasi inéquation précédente. On renvoie à Bensoussan-Goursat-Lions [1] pour la *comparaison* entre la solution de l'inéquation et de la quasi inéquation.

Commençons par le cas *stationnaire*.

On a alors une forme  $b_\lambda(u, v)$  coercive sur  $V_\lambda$  et on considère la quasi inéquation :

$$(6.32) \quad \left| \begin{array}{l} b_\lambda(u, v - u) \geq (f, v - u)_\lambda, \quad \forall v \leq M(u), \\ u \leq M(u), \quad u, v \in V_\lambda. \end{array} \right.$$

On montre l'existence d'une solution  $u \geq 0$  lorsque  $f$  est donnée  $\geq 0$ , par le procédé itératif suivant ; on part de  $u^0$  solution de :

$$(6.33) \quad b_\lambda(u^0, v) = (f, v)_\lambda, \quad \forall v \in V_\lambda.$$

puis l'on définit  $u^1$  par la solution de l'inéquation variationnelle :

$$(6.34) \quad \left| \begin{array}{l} b_\lambda(u^1, v - u^1) \geq (f, v - u^1)_\lambda, \quad \forall v \text{ avec } v \leq M(u^0), \\ u^1 \leq M(u^0) \end{array} \right.$$

et l'on définit de proche en proche  $u^n$  à partir de  $u^{n-1}$  par la solution de l'inéquation variationnelle :

$$(6.35) \quad \left| \begin{array}{l} b_\lambda(u^n, v - u^n) \geq (f, v - u^n)_\lambda, \quad \forall v \leq M(u^{n-1}), \\ u^n \leq M(u^{n-1}). \end{array} \right.$$

On démontre que:

$$(6.36) \quad u^0 \geq u^1 \geq \dots \geq u^{n-1} \geq u^n \geq \dots \geq 0$$

et que  $u^n$  demeure dans un borné de  $V_\lambda$ . Donc:

$u^n \rightarrow u$  dans  $V_\lambda$  faible,  $u$  satisfait à (6.32) et  $u$  est  $\geq 0$ .

Dans le cas d'évolution on introduit (Cf. Bensoussan-Lions [3]) les *solutions faibles* de la quasi inéquation, de la même façon que la solution faible des inéquations. On considère la classe de fonctions:

$$(6.37) \quad \mathcal{V} = \left\{ v \mid v, \frac{\partial v}{\partial t} \in L^2(0, T; V_\lambda), v(T) = 0 \right\}.$$

Supposons que  $u$  soit solution de (6.29) (6.30) (6.31) et calculons la quantité:

$$(6.38) \quad \left| \begin{array}{l} X = \int_0^T \left[ - \left( \frac{\partial v}{\partial t}, v - u \right)_\lambda + b_\lambda(t; u, v - u) - (f, v - u)_\lambda \right] dt, \\ v \in \mathcal{V}, v \leq M(u). \end{array} \right.$$

On a:

$$(6.39) \quad \left| \begin{array}{l} X = \int_0^T \left[ - \left( \frac{\partial u}{\partial t}, v - u \right)_\lambda + b_\lambda(t; u, v - u) - (f, v - u)_\lambda \right] dt + Y, \\ Y = \int_0^T \left( - \frac{\partial}{\partial t} (v - u), v - u \right)_\lambda dt = \frac{1}{2} \left| v(0) - u(0) \right|_\lambda^2 \geq 0. \end{array} \right.$$

D'après (6.30) le premier terme du deuxième membre de (6.39) est  $\geq 0$ , et par conséquent  $X \geq 0$ .

On définit alors une solution faible du problème (6.29) (6.30) (6.31) comme étant une fonction  $u$  telle que:

$$(6.40) \quad u \in L^2(0, T; V_\lambda), u \leq M(u),$$

$$(6.41) \quad \int_0^T \left[ - \left( \frac{\partial v}{\partial t}, v-u \right)_\lambda + b_\lambda(t; u, v-u) - (f, v-u)_\lambda \right] dt \geq 0$$

$$\forall v \in \mathcal{V}, \text{ tel que } v \leq M(u).$$

On montre encore (cf. Bensoussan, Lions [3]) l'existence d'une solution  $u \geq 0$  de (6.40) (6.41) lorsque  $f$  est donnée  $\geq 0$ .

Le principe d'une démonstration est d'utiliser un processus d'itération analogue à (6.35) mais où l'on doit alors régulariser  $M$  de façon convenable (pour que l'inéquation variationnelle correspondante admette une solution forte). Une autre démonstration repose sur la méthode des différences finies.

### Remarque 6.3.

Naturellement on rencontre les problèmes analogues en dimension quelconque d'espace — la dimension de l'espace correspondant au nombre de biens à gérer. On rencontre aussi de nombreuses autres fonctionnelles  $M$  correspondant à diverses situations économiques. Nous renvoyons à Bensoussan, Lions [2]; on trouvera dans M. Goursat [1] l'étude de l'approximation numérique de la solution de ces inéquations quasi variationnelles.

### Remarque 6.4.

Les inéquations variationnelles, stationnaires ou d'évolution, interviennent dans de nombreux problèmes de Physique et de Mécanique (cf. Duvaut, Lions [1] et la bibliographie de ce livre, C. Baiocchi et E. Magenes [1], H. Brezis et G. Duvaut [1], H. Brezis et G. Stampacchia [1]).

## 6.3. Problèmes de temps d'arrêt optimal

On a montré dans Bensoussan-Lions [1] comment des problèmes de temps d'arrêt optimal se ramènent à l'étude d'inéquations variationnelles du type suivant:

$$(6.42) \quad - \left( \frac{\partial v}{\partial t}, v-u \right)_\lambda + b_\lambda(t; u, v-u) \geq (f, v-u)_\lambda, \forall v \in K_1$$