(6.13) $w(x, T) = 0.$

Nous allons maintenant montrer comment les égalités et inégalités (6.9) ... (6.13), caractérisent la fonction w (pourvu d'ajouter des conditions de croissance à l'infini en x sur w). L'*unicité* résulte des raisonnements probabilistes conduisant aux inégalités précédentes. On donne seulement dans la suite des indications sur l'*existence* d'une solution.

6.2. *Réduction à une inéquation quasi variationnelle d'évolution*

On introduit:

(6.14) $$u = \frac{w}{N(t)}\,.$$

Les conditions (6.9) ... (6.13) deviennent:

(6.15) $$u(x,t) \leqslant 1 + \inf_{\xi \geq 1} u(x+\xi, t)$$

(6.16) $$-\frac{\partial u}{\partial t} + A(t)\,u \leqslant f(x,t)\,,\, f(x,t) = \frac{l(x)}{N(t)}\,,$$

(6.17) $$u(x,t) = 1 + \inf_{\xi \geq 1} u(x+\xi, t)\,,\; x \leqslant \Sigma_1(t),$$

(6.18) $$-\frac{\partial u}{\partial t} + A(t)\,u = f \text{ pour } x > \Sigma_1(t),$$

(6.19) $$u(x,T) = 0,$$

où $A(t)$ est défini par:

(6.20) $$A(t)\,\varphi = -\frac{1}{2}\sigma^2(t)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \mu(t)\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{N'(t)}{N(t)}\varphi.$$

On va maintenant transformer (6.15) ... (6.19) en une inéquation quasi variationnelle.

Remarque 6.1.

La transformation simple (6.14) a pour *seul* but de transformer (6.9) en (6.15). La condition (6.9) conduit à introduire l'ensemble des fonctions φ sur $\mathbf{R}$, à croissance convenable à l'infini, et telles que:

$$\varphi(x) \leqslant N(t) + \inf_{\xi \geq 0} \varphi(x+\xi), \tag{6.21}$$

ensemble *qui dépend de t*; sous la forme (6.15), cela revient à prendre $N(t) = 1$ dans (6.21) et l'ensemble correspondant *ne dépend plus* de t; cette simplification est techniquement utile.

On va utiliser des espaces fonctionnels hilbertiens *contenant des poids* choisis de manière que $l(x)$ appartienne à ces espaces.

Pour $\lambda > 0$ [1]), on pose:

$$m_\lambda(x) = \exp(-\lambda \,|\, x \,|) \tag{6.22}$$

et l'on introduit:

$$H_\lambda = \{\varphi \,|\, m_\lambda \varphi \in L^2(\mathbf{R})\}, \tag{6.23}$$

$$V_\lambda = \{\varphi \,|\, \varphi \in H_\lambda, \frac{d\varphi}{dx} \in H_\lambda\}; \tag{6.24}$$

l'espage H_λ est un Hilbert pour la norme $|\, m_\lambda \varphi \,| = |\, \varphi \,|_\lambda$ (où $|\, m_\lambda \varphi \,|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} m_\lambda^2(x)\, \varphi(x)^2\, dx$) et V_λ est un Hilbert pour la norme:

$$\|\, \varphi \,\|_\lambda = \left(|\, \varphi \,|_\lambda^2 + \left| \frac{d\varphi}{dx} \right|_\lambda^2 \right)^{1/2}. \tag{6.25}$$

Pour $u, v \in V_\lambda$, on pose:

$$\begin{aligned} b_\lambda(t; u, v) &= \frac{1}{2} \sigma^2(t) \int_{\mathbf{R}} m_\lambda^2 \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx}\, dx - \lambda\, \sigma^2(t) \int_{\mathbf{R}} m_\lambda^2 \frac{x}{|\, x \,|} \left(\frac{du}{dx} \right) v\, dx \\ &+ \mu(t) \int_{\mathbf{R}} m_\lambda^2 \left(\frac{du}{dx} \right) v\, dx - \frac{N'(t)}{N(t)} \int_{\mathbf{R}} m_\lambda^2\, u\, v\, dx. \end{aligned} \tag{6.26}$$

On vérifie que $u, v \rightarrow b_\lambda(t; u, v)$ est une forme bilinéaire continue sur V_λ et on a fait ce qu'il fallait pour avoir:

$$b_\lambda(t; u, v) = \int_{\mathbf{R}} m_\lambda^2 (Au)\, v\, dx \tag{6.27}$$

(si par exemple v est à support compact et u assez régulière).

On introduit:

$$\begin{aligned} & M(\varphi)(x) = 1 + \inf_{\xi \geq 0} \varphi(x+\xi), \\ & K = \{\varphi \,|\, \varphi \in V_\lambda\,,\ \varphi(x) \leqslant M(\varphi)(x)\} \end{aligned} \tag{6.28}$$

[1]) On pourra prendre λ *arbitrairement petit.*

ce qui définit un ensemble convexe fermé non vide de V_λ.

On considère alors l' « *inéquation quasi variationnelle d'évolution* » *suivante :* trouver une fonction $t \to u(t)$ de $[0, T] \to V_\lambda$, telle que:

(6.29) $$u(t) \in K \text{ p.p.},$$

(6.30) $$-\left(\frac{\partial u}{\partial t}(t), v-u(t)\right)_\lambda + b_\lambda(t; u(t), v-u(t)) \geqslant (f(t), v-u(t))_\lambda, \forall v \leqslant M(u)$$

(6.31) $$u(T) = 0.$$

Remarque 6.2.

Il s'agit d'une « quasi inéquation » – l'inéquation variationnelle correspondant au convexe K étant obtenue lorsque dans (6.30) on prend v dans K, i.e. $v \leqslant M(v)$ (au lieu de $v \leqslant M(u)$).

On va maintenant donner quelques indications brèves sur la solution de la quasi inéquation précédente. On renvoie à Bensoussan-Goursat-Lions [1] pour la *comparaison* entre la solution de l'inéquation et de la quasi inéquation.

Commençons par le cas *stationnaire.*

On a alors une forme $b_\lambda(u, v)$ coercive sur V_λ et on considère la quasi inéquation:

(6.32) $$\left| \begin{array}{l} b_\lambda(u, v-u) \geqslant (f, v-u)_\lambda, \quad \forall v \leqslant M(u), \\ u \leqslant M(u), \; u, v \in V_\lambda. \end{array} \right.$$

On montre l'*existence d'une solution* $u \geqslant 0$ *lorsque* f *est donnée* $\geqslant 0$, par le procédé itératif suivant; on part de u^0 solution de:

(6.33) $$b_\lambda(u^0, v) = (f, v)_\lambda, \forall v \in V_\lambda.$$

puis l'on définit u^1 par la solution de l'*inéquation variationnelle*:

(6.34) $$\left| \begin{array}{l} b_\lambda(u^1, v-u^1) \geqslant (f, v-u^1)_\lambda, \quad \forall v \text{ avec } v \leqslant M(u^0), \\ u^1 \leqslant M(u^0) \end{array} \right.$$

et l'on définit de proche en proche u^n à partir de u^{n-1} par la solution de l'inéquation variationnelle:

$$(6.35)\qquad \left|\begin{array}{l} b_\lambda(u^n, v-u^n) \geqslant (f, v-u^n)_\lambda\,, \quad \forall\, v \leqslant M(u^{n-1}), \\ \\ u^n \leqslant M(u^{n-1}). \end{array}\right.$$

On démontre que:

$$(6.36)\qquad u^0 \geqslant u^1 \geqslant \ldots\ldots \geqslant u^{n-1} \geqslant u^n \geqslant \ldots \geqslant 0$$

et que u^n demeure dans un borné de V_λ. Donc:

$u^n \to u$ dans V_λ faible, u satisfait à (6.32) et u est $\geqslant 0$.

Dans le cas d'*évolution* on introduit (Cf. Bensoussan-Lions [3]) les *solutions faibles* de la quasi inéquation, de la même façon que la solution faible des inéquations. On considère la classe de fonctions:

$$(6.37)\qquad \mathscr{V} = \left\{v \mid v, \frac{\partial v}{\partial t} \in L^2(0, T; V_\lambda), v(T) = 0\right\}.$$

Supposons que u soit solution de (6.29) (6.30) (6.31) et calculons la quantité:

$$(6.38)\qquad \left|\begin{array}{l} X = \int_0^T \left[-\left(\dfrac{\partial v}{\partial t}, v-u\right)_\lambda + b_\lambda(t; u, v-u) - (f, v-u)_\lambda \right] dt, \\ \\ v \in \mathscr{V}\,,\ v \leqslant M(u). \end{array}\right.$$

On a:

$$(6.39)\qquad \left|\begin{array}{l} X = \int_0^T \left[-\left(\dfrac{\partial u}{\partial t}, v-u\right)_\lambda + b_\lambda(t; u, v-u) - (f, v-u)_\lambda \right] dt + Y, \\ \\ Y = \int_0^T \left(-\dfrac{\partial}{\partial t}(v-u), v-u \right)_\lambda dt = \dfrac{1}{2} \left| v(0) - u(0) \right|_\lambda^2 \geqslant 0. \end{array}\right.$$

D'après (6.30) le premier terme du deuxième membre de (6.39) est $\geqslant 0$, et par conséquent $X \geqslant 0$.

On *définit* alors une solution faible du problème (6.29) (6.30) (6.31) comme étant une fonction u telle que:

$$(6.40)\qquad u \in L^2(0, T; V_\lambda)\,,\ u \leqslant M(u),$$

$$(6.41) \quad \left| \begin{array}{l} \int_0^T \left[-\left(\frac{\partial v}{\partial t}, v-u\right)_\lambda + b_\lambda(t; u, v-u) - (f, v-u)_\lambda \right] dt \geqslant 0 \\ \forall\, v \in \mathscr{V}, \quad \text{tel que } v \leqslant M(u). \end{array} \right.$$

On montre encore (cf. Bensoussan, Lions [3]) l'*existence d'une solution* $u \geqslant 0$ *de* (6.40) (6.41) *lorsque* f *est donnée* $\geqslant 0$.

Le principe d'une démonstration est d'utiliser un processus d'itération analogue à (6.35) mais où l'on doit alors *régulariser* M de façon convenable (pour que l'inéquation varationnelle correspondante admette une solution forte). Une autre démonstration repose sur la méthode des différences finies.

Remarque 6.3.

Naturellement on rencontre les problèmes analogues en dimension quelconque d'espace — la dimension de l'espace correspondant au nombre de biens à gérer. On rencontre aussi de nombreuses autres fonctionnelles M correspondant à diverses situations économiques. Nous renvoyons à Bensoussan, Lions [2]; on trouvera dans M. Goursat [1] l'étude de l'approximation numérique de la solution de ces inéquations quasi variationnelles.

Remarque 6.4.

Les inéquations variationnelles, stationnaires ou d'évolution, interviennent dans de nombreux problèmes de Physique et de Mécanique (cf. Duvaut, Lions [1] et la bibliographie de ce livre, C. Baiocchi et E. Magenes [1], H. Brezis et G. Duvaut [1], H. Brezis et G. Stampacchia [1]).

6.3. *Problèmes de temps d'arrêt optimal*

On a montré dans Bensoussan-Lions [1] comment des problèmes de temps d'arrêt optimal se ramènent à l'étude d'inéquations variationnelles du type suivant:

$$(6.42) \qquad -\left(\frac{\partial v}{\partial t}, v-u\right)_\lambda + b_\lambda(t; u, v-u) \geqslant (f, v-u)_\lambda, \ \forall\, v \in K_1$$