

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 19 (1973)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** SUR LE CONTRÔLE OPTIMAL DE SYSTÈMES DISTRIBUÉS  
**Autor:** Lions, J. L.  
**Kapitel:** 6.1. Un problème de gestion optimale  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-46289>

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 16.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

THÉOREME 5.3. Pour  $g \in L^p(\Gamma)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , le problème (5.45) admet une solution  $\phi(g)$  unique dans  $L^p(\Omega)$ .

On a en outre :

$$(5.51) \quad \|\phi(g)\|_{L^p(\Omega)} \leq c \|g\|_{L^p(\Gamma)}.$$

*Remarque 5.5.*

On peut en outre montrer que dans les conditions du Théorème précédent :

$$(5.52) \quad \delta^{1/p} \beta(\phi) \in L^p(\Omega).$$

*Remarque 5.6.*

Si en particulier  $g \in L^2(\Gamma)$ , alors la solution faible de (5.44) vérifie :  $\phi \in L^2(\Omega)$ ,  $\delta^{1/2} \beta(\phi) \in L^2(\Omega)$  (donc  $\delta^{1/2} \Delta \phi \in L^2(\Omega)$ ).

Il ne semble pas que l'on puisse définir  $\frac{\partial \phi}{\partial v}$  dans ces conditions. Mais si  $g \in L^p(\Gamma)$ ,  $p > 2$ , alors on peut définir  $\frac{\partial \phi}{\partial v}$  dans un espace de distributions sur  $\Gamma$ , par adaptation des méthodes de Lions-Magenes [1].

Pour d'autres résultats et d'autres applications de l'interpolation non linéaire, cf. L. Tartar [2].

## 6. PROBLÈMES DE GESTION OPTIMALE ET INÉQUATIONS VARIATIONNELLES

### 6.1. Un problème de gestion optimale <sup>1)</sup>

Soit  $s$  l'instant initial,  $s \in [0, T]$  et soit  $x$  le stock de produits à l'instant  $s$ .

On se donne un processus de Wiener  $f(t)$  ( $f(0) = 0$ ) qui représente la demande cumulée jusqu'à l'instant  $t$ ; si l'on pose :

$$(6.1) \quad Ef(t) = \mu(t)$$

on a :

$$(6.2) \quad E(f(t) - \mu(t)(f(s) - \mu(s))) = \int_0^{\min(t,s)} \sigma^2(\tau) d\tau.$$

---

<sup>1)</sup> Les résultats des n° 6.1 et 6.2 sont dus à Bensoussan et l'auteur [2] [3] et à Bensoussan, Goursat et l'auteur [1]; nous renvoyons aux articles détaillés des ces auteurs pour les (longs) détails techniques.

On se donne des temps d'arrêts en nombre fini mais quelconques, avec:

$$(6.3) \quad 0 \leq \tau_1 \leq \tau_2 \leq \dots \leq \tau_i \leq \tau_N \leq T \text{ p.s.}$$

et des v.a.  $w_1, \dots, w_i, \dots, w_N$  avec  $w_i$  adaptée à  $f(t)$ ,  $t \in [0, \tau_i]$ .

La suite (finie)  $\tau_i, w_i$  est la variable de contrôle (stochastique).

L'état  $y(t)$  du système est donné par:

$$(6.4) \quad y(t) = x - (f(t) - f(s)) + \sum_{j=1}^i w_j, \quad \tau_i \leq t < \tau_{i+1}.$$

Soit  $t \rightarrow N(t)$  une fonction de  $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ , de classe  $C^1$ ,  $> 0$ , telle que  $N(\tau)$  désigne le coût d'une commande de produits à l'instant  $\tau$ .

La fonction coût du problème est alors:

$$(6.5) \quad J_s^x((\tau_i, w_i)) = E \left[ \sum_i N(\tau_i) + \int_s^T l(y(t)) dt \right]$$

où

$$(6.6) \quad \begin{cases} l(\lambda) \geq 0, \lambda \rightarrow l(\lambda) \text{ continue}, l(0) = 0, \\ l \text{ étant décroissante si } \lambda \leq 0, \text{ croissante si } \lambda \geq 0. \end{cases}$$

Pour fixer les idées:

$$(6.7) \quad l(\lambda) = c_1 \lambda^- + c_2 \lambda^+, \quad c_2 > 0, \quad c_1 \geq 0.$$

On pose:

$$(6.8) \quad w(x, s) = \inf_{(\tau_i, w_i)} J_s^x((\tau_i, w_i));$$

notre objet essentiel est d'obtenir une *caractérisation fonctionnelle* de  $w$  (fonction définie sur  $\mathbf{R}_x x \in ]0, T[$ ).

Nous renvoyons à Bensoussan et Lions [2] pour la vérification du résultat suivant:

$$(6.9) \quad w(x, t) \leq N(t) + \inf_{\xi \geq 0} w(x + \xi, t), \quad \forall x \in \mathbf{R}, t \in ]0, T[,$$

$$(6.10) \quad -\frac{\partial w}{\partial t} - \frac{1}{2} \sigma^2(t) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu(t) \frac{\partial w}{\partial x} \leq l(x), \quad x \in \mathbf{R}, t \in ]0, T[,$$

$$(6.11) \quad w(x, t) = N(t) + \inf_{\xi \geq 0} w(x + \xi, t) \text{ pour } x \leq \Sigma_1(t),$$

$$(6.12) \quad -\frac{\partial w}{\partial t} - \frac{1}{2} \sigma^2(t) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + m(t) \frac{\partial w}{\partial x} = l(x) \text{ pour } x > \Sigma_1(t),$$

$$(6.13) \quad w(x, T) = 0.$$

Nous allons maintenant montrer comment les égalités et inégalités (6.9) ... (6.13), caractérisent la fonction  $w$  (pourvu d'ajouter des conditions de croissance à l'infini en  $x$  sur  $w$ ). L'*unicité* résulte des raisonnements probabilistes conduisant aux inégalités précédentes. On donne seulement dans la suite des indications sur l'*existence* d'une solution.

## 6.2. Réduction à une inéquation quasi variationnelle d'évolution

On introduit:

$$(6.14) \quad u = \frac{w}{N(t)}.$$

Les conditions (6.9) ... (6.13) deviennent:

$$(6.15) \quad u(x, t) \leq 1 + \inf_{\xi \geq 1} u(x + \xi, t)$$

$$(6.16) \quad -\frac{\partial u}{\partial t} + A(t)u \leq f(x, t), \quad f(x, t) = \frac{l(x)}{N(t)},$$

$$(6.17) \quad u(x, t) = 1 + \inf_{\xi \geq 1} u(x + \xi, t), \quad x \leq \Sigma_1(t),$$

$$(6.18) \quad -\frac{\partial u}{\partial t} + A(t)u = f \text{ pour } x > \Sigma_1(t),$$

$$(6.19) \quad u(x, T) = 0,$$

où  $A(t)$  est défini par:

$$(6.20) \quad A(t)\varphi = -\frac{1}{2}\sigma^2(t)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \mu(t)\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{N'(t)}{N(t)}\varphi.$$

On va maintenant transformer (6.15) ... (6.19) en une inéquation quasi variationnelle.

*Remarque 6.1.*

La transformation simple (6.14) a pour *seul* but de transformer (6.9) en (6.15). La condition (6.9) conduit à introduire l'ensemble des fonctions  $\varphi$  sur  $\mathbf{R}$ , à croissance convenable à l'infini, et telles que: