Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 19 (1973)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LE CONTRÔLE OPTIMAL DE SYSTÈMES DISTRIBUÉS

Autor: Lions, J. L.

Kapitel: 6.1. Un problème de gestion optimale

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-46289

THÉOREME 5.3. *Pour* $g \in L^p(\Gamma)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, *le problème* (5.45) *admet une solution* $\phi(g)$ *unique dans* $L^p(\Omega)$.

On a en outre :

(5.51) $$\| \phi(g) \|_{L^p(\Omega)} \leqslant c \| g \|_{L^p(\Gamma)} .$$

Remarque 5.5.

On peut en outre montrer que dans les conditions du Théorème précédent:

(5.52) $$\delta^{1/p} \beta(\phi) \in L^p(\Omega).$$

Remarque 5.6.

Si en particulier $g \in L^2(\Gamma)$, alors la solution faible de (5.44) vérifie: $\phi \in L^2(\Omega)$, $\delta^{1/2} \beta(\phi) \in L^2(\Omega)$ (donc $\delta^{1/2} \Delta \phi \in L^2(\Omega)$).

Il ne semble pas que l'on puisse définir $\dfrac{\partial \phi}{\partial \nu}$ dans ces conditions. Mais si $g \in L^p(\Gamma)$, $p > 2$, alors on peut définir $\dfrac{\partial \phi}{\partial \nu}$ dans un espace de distributions sur Γ, par adaptation des méthodes de Lions-Magenes [1].

Pour d'autres résultats et d'autres applications de l'interpolation non linéaire, cf. L. Tartar [2].

6. Problèmes de gestion optimale et inéquations variationnelles

6.1. *Un problème de gestion optimale* [1])

Soit s l'instant initial, $s \in [0, T]$ et soit x le stock de produits à l'instant s.

On se donne un processus de Wiener $f(t)$ ($f(0) = 0$) qui représente la demande cumulée jusqu'à l'instant t; si l'on pose:

(6.1) $$Ef(t) = \mu(t)$$

on a:

(6.2) $$E(f(t) - \mu(t)(f(s) - \mu(s)) = \int_0^{\min(t,s)} \sigma^2(\tau)\, d\tau .$$

---

[1]) Les résultats des n° 6.1 et 6.2 sont dus à Bensoussan et l'auteur [2] [3] et à Bensoussan, Goursat et l'auteur [1]; nous renvoyons aux articles détaillés des ces auteurs pour les (longs) détails techniques.

On se donne des temps d'arrêts en nombre fini mais quelconques, avec:

(6.3) $$0 \leqslant \tau_1 \leqslant \tau_2 \leqslant \dots \leqslant \tau_i \leqslant \tau_N \leqslant T \quad \text{p.s.}$$

et des v.a. $w_1 \dots\dots w_i \dots\dots w_N$ avec w_i adaptée à $f(t)$, $t \in [0, \tau_i]$.

La suite (finie) τ_i, w_i est la variable de contrôle (stochastique).

L'*état* $y(t)$ du système est donné par:

(6.4) $$y(t) = x - (f(t) - f(s)) + \sum_{j=1}^{i} w_j \,, \ \tau_i \leqslant t < \tau_{i+1}.$$

Soit $t \to N(t)$ une fonction de $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, de classe C^1, > 0, telle que $N(\tau)$ désigne le coût d'une commande de produits à l'instant τ.

La *fonction coût* du problème est alors:

(6.5) $$J_s^x((\tau_i, w_i)) = E\left[\sum_i N(\tau_i) + \int_s^T l(y(t))\,dt\right]$$

où

(6.6) $$\left|\begin{array}{l} l(\lambda) \geqslant 0 \,, \ \lambda \to l(\lambda) \text{ continue} \,, \ l(0) = 0, \\ \\ \quad l \text{ étant décroissante si } \lambda \leqslant 0, \text{ croissante si } \lambda \geqslant 0. \end{array}\right.$$

Pour fixer les idées:

(6.7) $$l(\lambda) = c_1 \lambda^- + c_2 \lambda^+ \,, \ c_2 > 0, \ c_1 \geqslant 0.$$

On pose:

(6.8) $$w(x, s) = \inf_{(\tau_i\, w_i)} J_s^x((\tau_i, w_i));$$

notre objet essentiel est d'obtenir une *caractérisation fonctionnelle* de w (fonction définie sur $\mathbf{R}_x x\,]0, T[$).

Nous renvoyons à Bensoussan et Lions [2] pour la vérification du résultat suivant:

(6.9) $$w(x, t) \leqslant N(t) + \inf_{\xi \geq 0} w(x+\xi, t) \,, \ \forall\, x \in \mathbf{R} \,, \ t \in]0, T[,$$

(6.10) $$-\frac{\partial w}{\partial t} - \frac{1}{2}\sigma^2(t)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu(t)\frac{\partial w}{\partial x} \leqslant l(x) \,, \ x \in \mathbf{R} \,, \ t \in]0, T[,$$

(6.11) $$w(x, t) = N(t) + \inf_{\xi \geq 0} w(x+\xi, t) \ \text{ pour } x \leqslant \Sigma_1(t),$$

(6.12) $$-\frac{\partial w}{\partial t} - \frac{1}{2}\sigma^2(t)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + m(t)\frac{\partial w}{\partial x} = l(x) \ \text{ pour } x > \Sigma_1(t),$$

(6.13) $w(x, T) = 0.$

Nous allons maintenant montrer comment les égalités et inégalités (6.9) ... (6.13), caractérisent la fonction w (pourvu d'ajouter des conditions de croissance à l'infini en x sur w). L'*unicité* résulte des raisonnements probabilistes conduisant aux inégalités précédentes. On donne seulement dans la suite des indications sur l'*existence* d'une solution.

6.2. *Réduction à une inéquation quasi variationnelle d'évolution*

On introduit:

$$u = \frac{w}{N(t)} \cdot \tag{6.14}$$

Les conditions (6.9) ... (6.13) deviennent:

$$u(x, t) \leqslant 1 + \inf_{\xi \geq 1} u(x+\xi, t) \tag{6.15}$$

$$-\frac{\partial u}{\partial t} + A(t)u \leqslant f(x, t) \,, f(x, t) = \frac{l(x)}{N(t)} \,, \tag{6.16}$$

$$u(x, t) = 1 + \inf_{\xi \geq 1} u(x+\xi, t) \,,\; x \leqslant \Sigma_1(t), \tag{6.17}$$

$$-\frac{\partial u}{\partial t} + A(t)u = f \text{ pour } x > \Sigma_1(t), \tag{6.18}$$

$$u(x, T) = 0, \tag{6.19}$$

où $A(t)$ est défini par:

$$A(t)\varphi = -\frac{1}{2}\sigma^2(t)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \mu(t)\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{N'(t)}{N(t)}\varphi. \tag{6.20}$$

On va maintenant transformer (6.15) ... (6.19) en une inéquation quasi variationnelle.

Remarque 6.1.

La transformation simple (6.14) a pour *seul* but de transformer (6.9) en (6.15). La condition (6.9) conduit à introduire l'ensemble des fonctions φ sur $\mathbf{R}$, à croissance convenable à l'infini, et telles que: