

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 19 (1973)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** SUR LE CONTRÔLE OPTIMAL DE SYSTÈMES DISTRIBUÉS  
**Autor:** Lions, J. L.  
**Kapitel:** 5.4. Remarques sur certains problèmes elliptiques non linéaires non homogènes  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-46289>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 25.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

$$(5.40) \quad \left| \begin{array}{l} u_\varepsilon \text{ étant une solution quelconque de (5.37), } u_\varepsilon \rightarrow u_0 \text{ dans} \\ L^2(\Gamma) \text{ faible.} \end{array} \right.$$

En effet, on note que (en posant  $|\varphi|^2 = \int_\Gamma \varphi^2 d\Gamma$ ):

$$\varepsilon |u_\varepsilon|^2 \leq J_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq J_\varepsilon(u_0) = \varepsilon |u_0|^2$$

donc:

$$(5.41) \quad |u_\varepsilon| \leq |u_0|.$$

On peut donc extraire une suite, encore notée  $u_\varepsilon$ , telle que:

$$(5.42) \quad u_\varepsilon \rightarrow w \text{ dans } L^2(\Gamma) \text{ faible.}$$

On vérifie sans peine que  $y(u_\varepsilon) \rightarrow y(w)$  dans  $H^1(\Gamma)$  faible et qu'alors:

$$(5.43) \quad J_\varepsilon(u_\varepsilon) \rightarrow J(w) = \int_\Gamma |y(w) - z_d|^2 d\Gamma.$$

Mais:

$$J_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq J_\varepsilon(v) \quad \forall v \in L^2(\Gamma) \text{ donne, avec (5.43):}$$

$$J(w) \leq J(v) \quad \forall v \in L^2(\Gamma)$$

donc  $J(w) \leq J(u_0) = 0$  donc  $y(w) \Big|_\Gamma = z_d$  donc  $y(w) = \phi_0$ , donc  $w = u_0$ , d'où (5.40).

A la lumière des résultats du n° 5.2., on peut conjecturer que sans l'hypothèse de régularité (5.39),  $u_\varepsilon$  converge vers  $u_0$  dans un espace « plus grand » que  $L^2(\Gamma)$ .

Ce problème est ouvert; pour un peu en préciser l'énoncé, on est conduit à la question des problèmes « non linéaires non homogènes » qui est abordée au n° suivant.

#### 5.4. Remarques sur certains problèmes elliptiques non linéaires non homogènes

Avec un changement de notations par rapport à (5.38), on étudie le problème suivant: trouver  $\phi$  solution de

$$(5.44) \quad \left| \begin{array}{l} -\Delta\phi + \beta(\phi) = 0, \\ \phi \Big|_\Gamma = g \end{array} \right.$$

où  $g$  est, *par exemple*, donné dans  $L^2(\Gamma)$  (le problème est facile si  $g \in H^{1/2}(\Gamma)$ ).

Il faut évidemment introduire (puisque'il en est déjà ainsi dans les cas *linéaires* analogues; Cf. Lions-Magenes [1], Chapitre 2) des solutions *faibles* de (5.44): on dira que  $\phi$  est *solution faible* de (5.44) si:

$$(5.45) \quad (\phi, -\Delta\psi) + (\beta(\phi), \psi) = - \int_{\Gamma} g \frac{\partial\psi}{\partial\nu} d\Gamma$$

pour toute fonction  $\psi$  « régulière » dans  $\Omega$  et *nulle sur  $\Gamma$*  (on a posé  $(\phi, \psi) = \int_{\Omega} \phi \psi dx$ ).

Cela posé, on a le résultat suivant, dû à H. Brezis [1].

**THÉORÈME 5.2.** *Soit  $\delta(x) =$  distance de  $x$  à  $\Gamma$ . Si  $g$  est donné dans  $L^1(\Gamma)$  le problème (5.45) admet une solution unique telle que :*

$$(5.46) \quad \phi \in L^1(\Omega),$$

$$(5.47) \quad \delta \beta(\phi) \in L^1(\Omega),$$

et où dans (5.45) on peut prendre  $\psi \in H^{2,\infty}(\Omega) \cap H^{1,\infty}_0(\Omega)$ <sup>1)</sup>.

En outre l'application  $g \rightarrow \phi = \phi(g)$  est Lipschitzienne, au sens suivant :

Si  $g_i \in L^1(\Gamma)$  et si  $\phi(g_i) = \phi_i$ , on a :

$$(5.48) \quad \left| \begin{aligned} & \| \phi_1 - \phi_2 \|_{L^1(\Omega)} + \| \delta \beta(\phi_1) - \delta \beta(\phi_2) \|_{L^1(\Omega)} \\ & \leq c \| g_1 - g_2 \|_{L^1(\Gamma)}. \end{aligned} \right|$$

On va maintenant appliquer la *théorie de l'interpolation non linéaire* (Cf. Lions [6], J. Peetre [1]).

On vérifie sans peine que:

$$(5.49) \quad \| \phi \|_{L^\infty(\Omega)} \leq \| g \|_{L^\infty(\Gamma)}.$$

L'application  $g \rightarrow \phi = \phi(g)$  vérifie donc (5.49) et

$$(5.50) \quad \| \phi(g_1) - \phi(g_2) \|_{L^1(\Omega)} \leq c \| g_1 - g_2 \|_{L^1(\Gamma)}.$$

On peut alors *interpoler* entre ces estimations (Cf. Lions [6]) et l'on en déduit le

<sup>1)</sup> I.e.  $\psi, \frac{\partial\psi}{\partial x_i}, \frac{\partial^2\psi}{\partial x_i \partial x_j} \in L^\infty(\Omega), \psi = 0$  sur  $\Gamma$ .

THÉOREME 5.3. Pour  $g \in L^p(\Gamma)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , le problème (5.45) admet une solution  $\phi(g)$  unique dans  $L^p(\Omega)$ .

On a en outre :

$$(5.51) \quad \|\phi(g)\|_{L^p(\Omega)} \leq c \|g\|_{L^p(\Gamma)}.$$

Remarque 5.5.

On peut en outre montrer que dans les conditions du Théorème précédent :

$$(5.52) \quad \delta^{1/p} \beta(\phi) \in L^p(\Omega).$$

Remarque 5.6.

Si en particulier  $g \in L^2(\Gamma)$ , alors la solution faible de (5.44) vérifie :  $\phi \in L^2(\Omega)$ ,  $\delta^{1/2} \beta(\phi) \in L^2(\Omega)$  (donc  $\delta^{1/2} \Delta \phi \in L^2(\Omega)$ ).

Il ne semble pas que l'on puisse définir  $\frac{\partial \phi}{\partial \nu}$  dans ces conditions. Mais si  $g \in L^p(\Gamma)$ ,  $p > 2$ , alors on peut définir  $\frac{\partial \phi}{\partial \nu}$  dans un espace de distributions sur  $\Gamma$ , par adaptation des méthodes de Lions-Magenes [1].

Pour d'autres résultats et d'autres applications de l'interpolation non linéaire, cf. L. Tartar [2].

## 6. PROBLÈMES DE GESTION OPTIMALE ET INÉQUATIONS VARIATIONNELLES

### 6.1. Un problème de gestion optimale <sup>1)</sup>

Soit  $s$  l'instant initial,  $s \in [0, T]$  et soit  $x$  le stock de produits à l'instant  $s$ .

On se donne un processus de Wiener  $f(t)$  ( $f(0) = 0$ ) qui représente la demande cumulée jusqu'à l'instant  $t$ ; si l'on pose :

$$(6.1) \quad E f(t) = \mu(t)$$

on a :

$$(6.2) \quad E(f(t) - \mu(t)(f(s) - \mu(s))) = \int_0^{\min(t,s)} \sigma^2(\tau) d\tau.$$

<sup>1)</sup> Les résultats des n° 6.1 et 6.2 sont dus à Bensoussan et l'auteur [2] [3] et à Bensoussan, Goursat et l'auteur [1]; nous renvoyons aux articles détaillés des ces auteurs pour les (longs) détails techniques.