

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 19 (1973)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** SUR LE CONTRÔLE OPTIMAL DE SYSTÈMES DISTRIBUÉS  
**Autor:** Lions, J. L.  
**Kapitel:** 5.3. Cas d'un système non linéaire  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-46289>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 27.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

où

$$\left| \int_{\Gamma} g_{\varepsilon 1} \varphi d\Gamma \right| \leq c \|\varphi\|_{H^1(\Gamma)}, \quad \forall \varphi \in \mathcal{K},$$

$$\left| \int_{\Gamma} g_{\varepsilon 1} \varphi d\Gamma \right| \leq c \|\varphi\|_{L^2(\Gamma)}, \quad \forall \varphi \in \mathcal{K}.$$

On a alors:

$$(5.31) \quad \varphi_{\varepsilon} - (g + \theta_{\varepsilon}) \rightarrow 0 \text{ dans } H^1(\Gamma).$$

Le calcul de  $\theta_{\varepsilon}$  est un calcul de couche limite pour un opérateur pseudo-différentiel ( $\mathcal{A}$ ). Nous renvoyons pour cela à Demidov [1], Pokrovski [1].

Comme variante on peut prendre:

$$(5.29 \text{ bis}) \quad \mathcal{K} = \{\varphi \mid \varphi \in H^1(\Gamma), \varphi = y(o) \text{ sur } \mathcal{L}\}.$$

Cela signifie que  $\mathcal{U}_{ad}$  est l'ensemble des  $v$  tels que:

$$(5.32) \quad y(v) = 0 \text{ sur } \mathcal{L}.$$

Donc  $\mathcal{U}_{ad}$  est définie à partir des contraintes sur l'état, une situation fréquente dans les applications.

Evidemment, on a encore ici un phénomène de couche limite au voisinage de  $\mathcal{L}$  lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

*Remarque 5.2.*

On trouvera dans Lions [4] [5] l'analyse d'autres situations du même type (mais plus délicates).

### 5.3. Cas d'un système non linéaire

On considère maintenant le système dont l'état est donné par:

$$(5.33) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\Delta y + \beta(y) = 0 \text{ dans } \Omega, \\ \frac{\partial y}{\partial \nu} = v \text{ sur } \Gamma \end{array} \right.$$

où  $\lambda \rightarrow \beta(\lambda)$  est une fonction continue strictement croissante de  $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ , nulle à l'origine. Dans (5.33), on suppose que  $v \in L^2(\Gamma)$ ; le problème (5.33) admet une solution unique telle que:

$$(5.34) \quad y \in H^1(\Omega)$$

et

$$(5.35) \quad \int_{\Omega} y \beta(y) dx < \infty.$$

La fonction coût est encore donnée par:

$$(5.36) \quad J_{\varepsilon}(v) = \int_{\Gamma} |y(v) - z_d|^2 d\Gamma + \varepsilon \int_{\Gamma} v^2 d\Gamma,$$

et  $\mathcal{U}_{ad}$  est encore un ensemble fermé convexe non vide de  $L^2(\Gamma)$ .

On vérifie sans peine qu'il existe  $u_{\varepsilon} \in \mathcal{U}_{ad}$  tel que:

$$(5.37) \quad J_{\varepsilon}(u_{\varepsilon}) = \inf J_{\varepsilon}(v), v \in \mathcal{U}_{ad}$$

mais la fonction  $v \rightarrow J_{\varepsilon}(v)$  n'ayant pas de raison d'être convexe, il n'y a aucune raison pour que  $u_{\varepsilon}$  soit unique.

*Remarque 5.3.*

On pourra trouver dans Lions [2], Chapitre 3, n° 2, des exemples d'équations d'état non linéaires conduisant à des fonctions coût *convexes*.

*Remarque 5.4.*

Il serait intéressant de pouvoir donner des « estimations topologiques » du *nombre éventuel* de solutions du problème (5.37).

Notre objet est maintenant de faire tendre  $\varepsilon$  vers 0.

De manière formelle, lorsque  $\mathcal{U}_{ad} = L^2(\Gamma)$ , on considère le problème de Dirichlet non homogène

$$(5.38) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\Delta \phi_0 + \beta(\phi_0) = 0, \\ \phi_0|_{\Gamma} = z_d \end{array} \right.$$

qui admet une solution unique dans  $H^1(\Omega)$  si  $z_d \in H^{1/2}(\Gamma)$ .

Faisons l'hypothèse (de régularité sur  $z_d$  et sur  $\beta$ ) que:

$$(5.39) \quad u_0 = \frac{\partial \phi_0}{\partial \nu} \Big|_{\Gamma} \in L^2(\Gamma).$$

On a alors:

(5.40)  $\left| \begin{array}{l} u_\varepsilon \text{ étant une solution quelconque de (5.37), } u_\varepsilon \rightarrow u_0 \text{ dans} \\ L^2(\Gamma) \text{ faible.} \end{array} \right.$

En effet, on note que (en posant  $|\varphi|^2 = \int_\Gamma \varphi^2 d\Gamma$ ):

$$\varepsilon |u_\varepsilon|^2 \leq J_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq J_\varepsilon(u_0) = \varepsilon |u_0|^2$$

donc:

$$(5.41) \quad |u_\varepsilon| \leq |u_0|.$$

On peut donc extraire une suite, encore notée  $u_\varepsilon$ , telle que:

$$(5.42) \quad u_\varepsilon \rightarrow w \text{ dans } L^2(\Gamma) \text{ faible.}$$

On vérifie sans peine que  $y(u_\varepsilon) \rightarrow y(w)$  dans  $H^1(\Gamma)$  faible et qu'alors:

$$(5.43) \quad J_\varepsilon(u_\varepsilon) \rightarrow J(w) = \int_\Gamma |y(w) - z_d|^2 d\Gamma.$$

Mais:

$$J_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq J_\varepsilon(v) \quad \forall v \in L^2(\Gamma) \text{ donne, avec (5.43):}$$

$$J(w) \leq J(v) \quad \forall v \in L^2(\Gamma)$$

donc  $J(w) \leq J(u_0) = 0$  donc  $y(w) \Big|_\Gamma = z_d$  donc  $y(w) = \phi_0$ , donc  $w = u_0$ , d'où (5.40).

A la lumière des résultats du n° 5.2., on peut conjecturer que sans l'hypothèse de régularité (5.39),  $u_\varepsilon$  converge vers  $u_0$  dans un espace « plus grand » que  $L^2(\Gamma)$ .

Ce problème est ouvert; pour un peu en préciser l'énoncé, on est conduit à la question des problèmes « non linéaires non homogènes » qui est abordée au n° suivant.

#### 5.4. Remarques sur certains problèmes elliptiques non linéaires non homogènes

Avec un changement de notations par rapport à (5.38), on étudie le problème suivant: trouver  $\phi$  solution de

$$(5.44) \quad \left| \begin{array}{l} -\Delta\phi + \beta(\phi) = 0, \\ \phi \Big|_\Gamma = g \end{array} \right.$$