

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 19 (1973)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LE CONTRÔLE OPTIMAL DE SYSTÈMES DISTRIBUÉS
Autor: Lions, J. L.
Kapitel: 5.2. Cas d'un système linéaire
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-46289>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 16.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

correspondant aux *couches limites*; si $\theta_\varepsilon(v)$ désigne une telle correction, on est donc conduit à remplacer $y_\varepsilon(v)$ par $y(v) + \theta_\varepsilon(v)$ — ce qui conduit à un problème de contrôle optimal approché qui peut être plus simple; une question est alors évidemment d'analyser en fonction de ε l'erreur ainsi commise; nous ne développons pas ici ce point de vue, renvoyant à Lions [3], Chapitre 7;

(ii) la fonction coût contient, en général, un terme de la forme $N \|v\|^2$ où $\|v\|$ est une norme sur l'espace des contrôles et où N est un paramètre > 0 d'autant plus petit que v est « bon marché ». Cela conduit aux problèmes de contrôle où $N \rightarrow 0$; ce sont, comme on va voir, des problèmes de perturbations singulières.

5.2. Cas d'un système linéaire

Commençons par un exemple très simple. Dans un ouvert Ω borné de \mathbf{R}^n de frontière régulière Γ , on considère un système dont l'état $y = y(x, v) = y(v)$ est donné par:

$$(5.1) \quad A y(v) = f \text{ dans } \Omega,$$

$$(5.2) \quad \frac{\partial y(v)}{\partial \nu} = v \text{ sur } \Gamma$$

où A est un opérateur elliptique du 2^e ordre, $\frac{\partial}{\partial \nu}$ la dérivée conormale associée à A , et où f (resp. v) est pris dans $L^2(\Omega)$ (resp. $L^2(\Gamma)$).

On prendra par exemple A donné par:

$$(5.3) \quad A \varphi = - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right) + a_0 \varphi,$$

où les a_{ij} vérifient (2.3) et où $a_0 \in L^\infty(\Omega)$, $a_0(x) \geq \alpha_0 > 0$ p.p.

Le problème (5.1) (5.2) admet une solution unique:

$$(5.4) \quad y(v) \in H^1(\Omega).$$

La fonction coût est donnée par:

$$(5.5) \quad J_\varepsilon(v) = \int_\Gamma |y(v) - z_d|^2 d\Gamma + \varepsilon \int_\Gamma v^2 d\Gamma,$$

où z_d est donné dans $L^2(\Gamma)$ et où $\varepsilon > 0$ « petit ».

Soit par ailleurs:

$$(5.6) \quad \mathcal{U}_{ad} = \text{ensemble fermé convexe non vide de } L^2(\Gamma).$$

Le problème de contrôle optimal:

$$(5.7) \quad \inf J_\varepsilon(v), v \in \mathcal{U}_{ad},$$

admet une solution unique, soit u_ε .

Notre objet est maintenant l'étude du comportement de u_ε lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$.

Si l'on pose:

$$y(u_\varepsilon) = y_\varepsilon$$

le contrôle optimal u_ε est caractérisé par:

$$(5.8) \quad \int_{\Gamma} (y_\varepsilon - z_d) (y(v) - y_\varepsilon) d\Gamma + \varepsilon \int_{\Gamma} u_\varepsilon (v - u_\varepsilon) d\Gamma \geq 0, \forall v \in \mathcal{U}_{ad}.$$

On pose:

$$(5.9) \quad (y(v) - y(0))_{\Gamma} = \varphi, (y(u_\varepsilon) - y(0))_{\Gamma} = \varphi_\varepsilon.$$

Alors v est donné à partir de φ de la façon suivante: on résout

$$(5.10) \quad A\phi = 0 \text{ dans } \Omega, \phi|_{\Gamma} = -\varphi$$

et l'on pose:

$$(5.11) \quad \mathcal{A}\varphi = \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \Big|_{\Gamma}.$$

Alors:

$$(5.12) \quad v = \mathcal{A}\varphi.$$

L'opérateur \mathcal{A} est un *isomorphisme* de $H^s(\Gamma) \rightarrow H^{s-1}(\Gamma)$, $\forall s \in \mathbb{R}$ (Cf. Lions-Magenes [1], Chapitres 1 et 2).

L'opérateur inverse \mathcal{A}^{-1} est donné comme suit: on résout

$$(5.13) \quad Aw = 0, \frac{\partial w}{\partial \nu} = v \text{ sur } \Gamma,$$

et alors:

$$(5.14) \quad w|_{\Gamma} = \mathcal{A}^{-1}v.$$

On introduit:

$$(5.15) \quad \mathcal{K} = \mathcal{A}^{-1}(\mathcal{U}_{ad}) = \text{ensemble convexe fermé (non vide) de } H^1(\Gamma).$$

Avec ces notations, le problème (5.8) équivaut à:

$$(5.16) \quad \left| \begin{array}{l} \int_{\Gamma} (\varphi_{\varepsilon} - (z_d - y(0))) (\varphi - \varphi_{\varepsilon}) d\Gamma + \varepsilon \int_{\Gamma} \mathcal{A} \varphi_{\varepsilon} \mathcal{A} (\varphi - \varphi_{\varepsilon}) d\Gamma \geq 0, \\ \varphi_{\varepsilon} \in \mathcal{K}, \forall \varphi \in \mathcal{K}. \end{array} \right.$$

Posons:

$$(5.17) \quad g = z_d - y(0).$$

Alors (5.16) équivaut à:

$$(5.18) \quad \varepsilon \int_{\Gamma} \mathcal{A} \varphi_{\varepsilon} \mathcal{A} (\varphi - \varphi_{\varepsilon}) d\Gamma + \int_{\Gamma} \varphi_{\varepsilon} (\varphi - \varphi_{\varepsilon}) d\Gamma \geq \int_{\Gamma} g (\varphi - \varphi_{\varepsilon}) d\Gamma, \forall \varphi \in \mathcal{K}.$$

C'est un problème de perturbations singulières pour des inéquations variationnelles (Cf. D. Huet [1], J. L. Lions [4] [5]). Le résultat est alors le suivant: on introduit

$$(5.19) \quad \overline{\mathcal{K}} = \text{adhérence de } \mathcal{K} \text{ dans } L^2(\Gamma),$$

et soit φ_0 la solution dans $\overline{\mathcal{K}}$ de:

$$(5.20) \quad \int_{\Gamma} \varphi_0 (\varphi - \varphi_0) d\Gamma \geq \int_{\Gamma} g (\varphi - \varphi_0) d\Gamma, \forall \varphi \in \overline{\mathcal{K}},$$

i.e.

$$(5.21) \quad \varphi_0 = \text{Proj.}_{\overline{\mathcal{K}}} g = \text{projection sur } \overline{\mathcal{K}} \text{ dans } L^2(\Gamma) \text{ de } g.$$

On a alors:

$$(5.22) \quad \varphi_{\varepsilon} \rightarrow \varphi_0 \text{ dans } L^2(\Gamma).$$

Par conséquent:

THÉORÈME 5.1. Lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, on a:

$$(5.23) \quad y_{\varepsilon} \Big|_{\Gamma} = y(u_{\varepsilon}) \Big|_{\Gamma} \rightarrow y(0) + \text{Proj.}_{\overline{\mathcal{K}}} (z_d - y(0)) \text{ dans } L^2(\Gamma).$$

On en déduit que:

$$(5.24) \quad u_{\varepsilon} = \mathcal{A} \varphi_{\varepsilon} \rightarrow u_0 = \mathcal{A} \varphi_0 \text{ dans } H^{-1}(\Gamma).$$

En général φ_0 n'est pas dans $H^1(\Gamma)$ de sorte que $\mathcal{A} \varphi_0$ n'est pas dans $L^2(\Gamma)$ de sorte que le résultat (5.24) ne peut pas en général être amélioré.

Remarque 5.1.

Si $\varphi_0 \in H^1(\Gamma)$ (et donc à \mathcal{K}) alors $\varphi_\varepsilon \rightarrow \varphi_0$ dans $H^1(\Gamma)$ et dans ce cas $u_\varepsilon \rightarrow u_0$ dans $L^2(\Gamma)$.

Exemple 5.1.

Prenons le cas « sans contraintes »

$$(5.25) \quad \mathcal{U}_{ad} = L^2(\Gamma).$$

Alors $\mathcal{A}^{-1} \mathcal{U}_{ad} = H^1(\Gamma)$ et $\overline{\mathcal{K}} = L^2(\Gamma)$. Donc $\varphi_0 = z_d - y(o)$ et par conséquent:

$$(5.26) \quad y(u_\varepsilon) \Big|_\Gamma \rightarrow z_d \text{ dans } L^2(\Gamma).$$

Pour obtenir u_0 , on résout:

$$(5.27) \quad A \phi_0 = 0, \phi_0 = z_d \text{ sur } \Gamma$$

et alors:

$$(5.28) \quad u_0 = \frac{\partial \phi_0}{\partial \nu}.$$

Exemple 5.2.

Soit \mathcal{L} une variété régulière de dimension $(n-2)$ contenue dans Γ . Supposons que:

$$(5.29) \quad \mathcal{K} = \{\varphi \mid \varphi \in H^1(\Gamma), \varphi = 0 \text{ sur } \mathcal{L}\}.$$

Alors $\overline{\mathcal{K}} = L^2(\Gamma)$. On a alors:

$$\varphi_\varepsilon \rightarrow g \text{ dans } L^2(\Gamma).$$

Si l'on fait l'hypothèse que $g \in H^1(\Gamma)$, on peut utiliser Lions [4] [5] pour définir des correcteurs θ_ε par:

$$(5.30) \quad \left| \begin{array}{l} \theta_\varepsilon + g \in \mathcal{K}, \\ \varepsilon \int_\Gamma \mathcal{A} \theta_\varepsilon \mathcal{A} (\varphi - \theta_\varepsilon) d\Gamma + \int_\Gamma \theta_\varepsilon (\varphi - \theta_\varepsilon) d\Gamma \geq \\ \int_\Gamma (\varepsilon g_{\varepsilon 1} + \varepsilon^{1/2} g_{\varepsilon 2}) (\varphi - \theta_\varepsilon) d\Gamma \\ \forall \varphi \text{ avec } \varphi + g \in \mathcal{K}, \end{array} \right.$$

où

$$\left| \int_{\Gamma} g_{\varepsilon 1} \varphi d\Gamma \right| \leq c \|\varphi\|_{H^1(\Gamma)}, \quad \forall \varphi \in \mathcal{K},$$

$$\left| \int_{\Gamma} g_{\varepsilon 1} \varphi d\Gamma \right| \leq c \|\varphi\|_{L^2(\Gamma)}, \quad \forall \varphi \in \mathcal{K}.$$

On a alors:

$$(5.31) \quad \varphi_{\varepsilon} - (g + \theta_{\varepsilon}) \rightarrow 0 \text{ dans } H^1(\Gamma).$$

Le calcul de θ_{ε} est un calcul de couche limite pour un opérateur pseudo-différentiel (\mathcal{A}). Nous renvoyons pour cela à Demidov [1], Pokrovski [1].

Comme variante on peut prendre:

$$(5.29 \text{ bis}) \quad \mathcal{K} = \{\varphi \mid \varphi \in H^1(\Gamma), \varphi = y(o) \text{ sur } \mathcal{L}\}.$$

Cela signifie que \mathcal{U}_{ad} est l'ensemble des v tels que:

$$(5.32) \quad y(v) = 0 \text{ sur } \mathcal{L}.$$

Donc \mathcal{U}_{ad} est définie à partir des contraintes sur l'état, une situation fréquente dans les applications.

Evidemment, on a encore ici un phénomène de couche limite au voisinage de \mathcal{L} lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$.

Remarque 5.2.

On trouvera dans Lions [4] [5] l'analyse d'autres situations du même type (mais plus délicates).

5.3. Cas d'un système non linéaire

On considère maintenant le système dont l'état est donné par:

$$(5.33) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\Delta y + \beta(y) = 0 \text{ dans } \Omega, \\ \frac{\partial y}{\partial \nu} = v \text{ sur } \Gamma \end{array} \right.$$

où $\lambda \rightarrow \beta(\lambda)$ est une fonction continue strictement croissante de $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, nulle à l'origine. Dans (5.33), on suppose que $v \in L^2(\Gamma)$; le problème (5.33) admet une solution unique telle que: