

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 19 (1973)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** SUR LE CONTRÔLE OPTIMAL DE SYSTÈMES DISTRIBUÉS  
**Autor:** Lions, J. L.  
**Kapitel:** 5.1. Orientations  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-46289>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 27.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

Soit  $y^\gamma(v)$  le nouvel état, correspondant à (4.16). On montre que  $y^\gamma(v) \rightarrow y(v)$  dans  $L^2(Q)$  lorsque  $\gamma$  converge vers  $\lambda^+$  (avec  $\gamma(\lambda) = \lambda$  pour  $\lambda \geq \lambda_0 > 0$ ) et l'on résout le problème de contrôle correspondant à  $y^\gamma(v)$ , la fonction  $v \rightarrow y^\gamma(v)$  étant cette fois différentiable.

*Remarque 4.4.*

La situation décrite à la Remarque 4.3. précédente est typique des *inéquations variationnelles* intervenant en Physique et en Mécanique (Cf. Duvaut-Lions [1]) et pour la résolution numérique desquelles on emploie constamment des processus de régularisation analogues à ceux de la Remarque précédente (Cf. Glowinski, Lions, Tremolières [1] et la bibliographie de ce livre).

*Remarque 4.5.*

Dans tous les problèmes considérés jusqu'ici, mais en particulier *dans le cas des problèmes multiphases*, on peut avoir à considérer des fonctions coût de la forme:

$$(4.17) \quad J(v) = \int_{E(v)} |y(v) - z_d|^2 dx dt$$

où  $E(v)$  est un ensemble géométrique défini à partir de  $y(v)$  (par exemple  $E(v)$  peut être l'ensemble où  $y(v) > 0$ ).

De nombreux problèmes restent à résoudre dans cette direction. Un exemple, relatif aux équations de Stefan, est résolu dans Vasiliev [1].

## 5. PHÉNOMÈNES DE PERTURBATIONS SINGULIÈRES

### 5.1. Orientations

Des phénomènes de perturbations singulières apparaissent dans la théorie du contrôle optimal pour deux raisons:

(i) l'état du système peut être décrit par une équation (ou un ensemble d'équations) contenant un petit paramètre  $\varepsilon$ , soit  $y_\varepsilon(v)$  cet état, correspondant à un contrôle  $v$ ; alors la théorie des perturbations (*singulières* si, comme c'est le cas le plus important,  $\varepsilon$  apparaît dans des dérivées d'ordre supérieur) permet de « remplacer »  $y_\varepsilon(v)$  par un « état approché » plus simple  $y(v)$  correspondant à la valeur  $\varepsilon = 0$  et avec des « corrections »

correspondant aux *couches limites*; si  $\theta_\varepsilon(v)$  désigne une telle correction, on est donc conduit à remplacer  $y_\varepsilon(v)$  par  $y(v) + \theta_\varepsilon(v)$  — ce qui conduit à un problème de contrôle optimal approché qui peut être plus simple; une question est alors évidemment d'analyser en fonction de  $\varepsilon$  l'erreur ainsi commise; nous ne développons pas ici ce point de vue, renvoyant à Lions [3], Chapitre 7;

(ii) la fonction coût contient, en général, un terme de la forme  $N \|v\|^2$  où  $\|v\|$  est une norme sur l'espace des contrôles et où  $N$  est un paramètre  $> 0$  d'autant plus petit que  $v$  est « bon marché ». Cela conduit aux problèmes de contrôle où  $N \rightarrow 0$ ; ce sont, comme on va voir, des problèmes de perturbations singulières.

### 5.2. Cas d'un système linéaire

Commençons par un exemple très simple. Dans un ouvert  $\Omega$  borné de  $\mathbf{R}^n$  de frontière régulière  $\Gamma$ , on considère un système dont l'état  $y = y(x, v) = y(v)$  est donné par:

$$(5.1) \quad A y(v) = f \text{ dans } \Omega,$$

$$(5.2) \quad \frac{\partial y(v)}{\partial \nu} = v \text{ sur } \Gamma$$

où  $A$  est un opérateur elliptique du 2<sup>e</sup> ordre,  $\frac{\partial}{\partial \nu}$  la dérivée conormale associée à  $A$ , et où  $f$  (resp.  $v$ ) est pris dans  $L^2(\Omega)$  (resp.  $L^2(\Gamma)$ ).

On prendra par exemple  $A$  donné par:

$$(5.3) \quad A \varphi = - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{ij} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right) + a_0 \varphi,$$

où les  $a_{ij}$  vérifient (2.3) et où  $a_0 \in L^\infty(\Omega)$ ,  $a_0(x) \geq \alpha_0 > 0$  p.p.

Le problème (5.1) (5.2) admet une solution unique:

$$(5.4) \quad y(v) \in H^1(\Omega).$$

La fonction coût est donnée par:

$$(5.5) \quad J_\varepsilon(v) = \int_\Gamma |y(v) - z_d|^2 d\Gamma + \varepsilon \int_\Gamma v^2 d\Gamma,$$

où  $z_d$  est donné dans  $L^2(\Gamma)$  et où  $\varepsilon > 0$  « petit ».

Soit par ailleurs: