Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 19 (1973)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LE CONTRÔLE OPTIMAL DE SYSTÈMES DISTRIBUÉS

Autor: Lions, J. L.

Kapitel: 5.1. Orientations

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-46289

Soit $y^\gamma(v)$ le nouvel état, correspondant à (4.16). On montre que $y^\gamma(v) \to y(v)$ dans $L^2(Q)$ lorsque γ converge vers λ^+ (avec $\gamma(\lambda) = \lambda$ pour $\lambda \geqslant \lambda_0 > 0$) et l'on résout le problème de contrôle correspondant à $y^\gamma(v)$, la fonction $v \to y^\gamma(v)$ étant cette fois différentiable.

Remarque 4.4.

La situation décrite à la Remarque 4.3. précédente est typique des *inéquations variationnelles* intervenant en Physique et en Mécanique (Cf. Duvaut-Lions [1]) et pour la résolution numérique desquelles on emploie constamment des processus de régularisation analogues à ceux de la Remarque précédente (Cf. Glowinski, Lions, Tremolières [1] et la bibliographie de ce livre).

Remarque 4.5.

Dans tous les problèmes considérés jusqu'ici, mais en particulier *dans le cas des problèmes multiphases*, on peut avoir à considérer des fonctions coût de la forme:

$$J(v) = \int_{E(v)} |y(v) - z_d|^2 \, dx \, dt \tag{4.17}$$

où $E(v)$ est un ensemble géométrique défini à partir de $y(v)$ (par exemple $E(v)$ peut être l'ensemble où $y(v) > 0$).

De nombreux problèmes restent à résoudre dans cette direction. Un exemple, relatif aux équations de Stefan, est résolu dans Vasiliev [1].

5. Phénomènes de perturbations singulières

5.1. *Orientations*

Des phénomènes de perturbations singulières apparaissent dans la théorie du contrôle optimal pour deux raisons:

(i) l'état du système peut être décrit par une équation (ou un ensemble d'équations) contenant un petit paramètre ε, soit $y_\varepsilon(v)$ cet état, correspondant à un contrôle v; alors la théorie des perturbations (*singulières* si, comme c'est le cas le plus important, ε apparaît dans des dérivées d'ordre supérieur) permet de « remplacer » $y_\varepsilon(v)$ par un « état approché » plus simple $y(v)$ correspondant à la valeur $\varepsilon = 0$ et avec des « *corrections* » correspondant aux *couches limites*; si $\theta_\varepsilon(v)$ désigne une telle correction, on est donc conduit à remplacer $y_\varepsilon(v)$ par $y(v) + \theta_\varepsilon(v)$ — ce qui conduit à un problème de contrôle optimal approché qui peut être plus simple; une question est alors évidemment d'analyser en fonction de ε l'erreur ainsi commise; nous ne développons pas ici ce point de vue, renvoyant à Lions [3], Chapitre 7;

(ii) la fonction coût contient, en général, un terme de la forme $N\|v\|^2$ où $\|v\|$ est une norme sur l'espace des contrôles et où N est un paramètre > 0 d'autant plus petit que v est « bon marché ». Cela conduit aux problèmes de contrôle où $N \to 0$; ce sont, comme on va voir, des problèmes de perturbations singulières.

5.2. *Cas d'un système linéaire*

Commençons par un exemple très simple. Dans un ouvert Ω borné de $\mathbf{R}^n$ de frontière régulière Γ, on considère un système dont l'état $y = y(x, v) = y(v)$ est donné par:

(5.1) $$A\,y(v) = f \text{ dans } \Omega,$$

(5.2) $$\frac{\partial y(v)}{\partial \nu} = v \text{ sur } \Gamma$$

où A est un opérateur elliptique du 2e ordre, $\dfrac{\partial}{\partial \nu}$ la dérivée conormale associée à A, et où f (resp. v) est pris dans $L^2(\Omega)$ (resp. $L^2(\Gamma)$).

On prendra par exemple A donné par:

(5.3) $$A\varphi = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right) + a_0\,\varphi,$$

où les a_{ij} vérifient (2.3) et où $a_0 \in L^\infty(\Omega)$, $a_0(x) \geqslant \alpha_0 > 0$ p.p.

Le problème (5.1) (5.2) admet une solution unique:

(5.4) $$y(v) \in H^1(\Omega).$$

La *fonction coût* est donnée par:

(5.5) $$J_\varepsilon(v) = \int_\Gamma |y(v) - z_d|^2\,d\Gamma + \varepsilon \int_\Gamma v^2\,d\Gamma,$$

où z_d est donné dans $L^2(\Gamma)$ et où $\varepsilon > 0$ « petit ».

Soit par ailleurs: