

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 19 (1973)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** SUR LE CONTRÔLE OPTIMAL DE SYSTÈMES DISTRIBUÉS  
**Autor:** Lions, J. L.  
**Kapitel:** 5. Phénomènes de perturbations singulières  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-46289>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 27.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

Soit  $y^\gamma(v)$  le nouvel état, correspondant à (4.16). On montre que  $y^\gamma(v) \rightarrow y(v)$  dans  $L^2(Q)$  lorsque  $\gamma$  converge vers  $\lambda^+$  (avec  $\gamma(\lambda) = \lambda$  pour  $\lambda \geq \lambda_0 > 0$ ) et l'on résout le problème de contrôle correspondant à  $y^\gamma(v)$ , la fonction  $v \rightarrow y^\gamma(v)$  étant cette fois différentiable.

*Remarque 4.4.*

La situation décrite à la Remarque 4.3. précédente est typique des *inéquations variationnelles* intervenant en Physique et en Mécanique (Cf. Duvaut-Lions [1]) et pour la résolution numérique desquelles on emploie constamment des processus de régularisation analogues à ceux de la Remarque précédente (Cf. Glowinski, Lions, Tremolières [1] et la bibliographie de ce livre).

*Remarque 4.5.*

Dans tous les problèmes considérés jusqu'ici, mais en particulier *dans le cas des problèmes multiphases*, on peut avoir à considérer des fonctions coût de la forme:

$$(4.17) \quad J(v) = \int_{E(v)} |y(v) - z_d|^2 dx dt$$

où  $E(v)$  est un ensemble géométrique défini à partir de  $y(v)$  (par exemple  $E(v)$  peut être l'ensemble où  $y(v) > 0$ ).

De nombreux problèmes restent à résoudre dans cette direction. Un exemple, relatif aux équations de Stefan, est résolu dans Vasiliev [1].

## 5. PHÉNOMÈNES DE PERTURBATIONS SINGULIÈRES

### 5.1. Orientations

Des phénomènes de perturbations singulières apparaissent dans la théorie du contrôle optimal pour deux raisons:

(i) l'état du système peut être décrit par une équation (ou un ensemble d'équations) contenant un petit paramètre  $\varepsilon$ , soit  $y_\varepsilon(v)$  cet état, correspondant à un contrôle  $v$ ; alors la théorie des perturbations (*singulières* si, comme c'est le cas le plus important,  $\varepsilon$  apparaît dans des dérivées d'ordre supérieur) permet de « remplacer »  $y_\varepsilon(v)$  par un « état approché » plus simple  $y(v)$  correspondant à la valeur  $\varepsilon = 0$  et avec des « corrections »

correspondant aux *couches limites*; si  $\theta_\varepsilon(v)$  désigne une telle correction, on est donc conduit à remplacer  $y_\varepsilon(v)$  par  $y(v) + \theta_\varepsilon(v)$  — ce qui conduit à un problème de contrôle optimal approché qui peut être plus simple; une question est alors évidemment d'analyser en fonction de  $\varepsilon$  l'erreur ainsi commise; nous ne développons pas ici ce point de vue, renvoyant à Lions [3], Chapitre 7;

(ii) la fonction coût contient, en général, un terme de la forme  $N \|v\|^2$  où  $\|v\|$  est une norme sur l'espace des contrôles et où  $N$  est un paramètre  $> 0$  d'autant plus petit que  $v$  est « bon marché ». Cela conduit aux problèmes de contrôle où  $N \rightarrow 0$ ; ce sont, comme on va voir, des problèmes de perturbations singulières.

### 5.2. Cas d'un système linéaire

Commençons par un exemple très simple. Dans un ouvert  $\Omega$  borné de  $\mathbf{R}^n$  de frontière régulière  $\Gamma$ , on considère un système dont l'état  $y = y(x, v) = y(v)$  est donné par:

$$(5.1) \quad A y(v) = f \text{ dans } \Omega,$$

$$(5.2) \quad \frac{\partial y(v)}{\partial \nu} = v \text{ sur } \Gamma$$

où  $A$  est un opérateur elliptique du 2<sup>e</sup> ordre,  $\frac{\partial}{\partial \nu}$  la dérivée conormale associée à  $A$ , et où  $f$  (resp.  $v$ ) est pris dans  $L^2(\Omega)$  (resp.  $L^2(\Gamma)$ ).

On prendra par exemple  $A$  donné par:

$$(5.3) \quad A \varphi = - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{ij} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right) + a_0 \varphi,$$

où les  $a_{ij}$  vérifient (2.3) et où  $a_0 \in L^\infty(\Omega)$ ,  $a_0(x) \geq \alpha_0 > 0$  p.p.

Le problème (5.1) (5.2) admet une solution unique:

$$(5.4) \quad y(v) \in H^1(\Omega).$$

La fonction coût est donnée par:

$$(5.5) \quad J_\varepsilon(v) = \int_\Gamma |y(v) - z_d|^2 d\Gamma + \varepsilon \int_\Gamma v^2 d\Gamma,$$

où  $z_d$  est donné dans  $L^2(\Gamma)$  et où  $\varepsilon > 0$  « petit ».

Soit par ailleurs:

$$(5.6) \quad \mathcal{U}_{ad} = \text{ensemble fermé convexe non vide de } L^2(\Gamma).$$

Le problème de contrôle optimal:

$$(5.7) \quad \inf J_\varepsilon(v), v \in \mathcal{U}_{ad},$$

admet une solution unique, soit  $u_\varepsilon$ .

Notre objet est maintenant l'étude du comportement de  $u_\varepsilon$  lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Si l'on pose:

$$y(u_\varepsilon) = y_\varepsilon$$

le contrôle optimal  $u_\varepsilon$  est caractérisé par:

$$(5.8) \quad \int_\Gamma (y_\varepsilon - z_d)(y(v) - y_\varepsilon) d\Gamma + \varepsilon \int_\Gamma u_\varepsilon(v - u_\varepsilon) d\Gamma \geq 0, \forall v \in \mathcal{U}_{ad}.$$

On pose:

$$(5.9) \quad (y(v) - y(0))_\Gamma = \varphi, (y(u_\varepsilon) - y(0))_\Gamma = \varphi_\varepsilon.$$

Alors  $v$  est donné à partir de  $\varphi$  de la façon suivante: on résout

$$(5.10) \quad A\phi = 0 \text{ dans } \Omega, \phi|_\Gamma = -\varphi$$

et l'on pose:

$$(5.11) \quad \mathcal{A}\varphi = \left. \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right|_\Gamma.$$

Alors:

$$(5.12) \quad v = \mathcal{A}\varphi.$$

L'opérateur  $\mathcal{A}$  est un *isomorphisme* de  $H^s(\Gamma) \rightarrow H^{s-1}(\Gamma)$ ,  $\forall s \in \mathbf{R}$  (Cf. Lions-Magenes [1], Chapitres 1 et 2).

L'opérateur inverse  $\mathcal{A}^{-1}$  est donné comme suit: on résout

$$(5.13) \quad Aw = 0, \frac{\partial w}{\partial \nu} = v \text{ sur } \Gamma,$$

et alors:

$$(5.14) \quad w|_\Gamma = \mathcal{A}^{-1}v.$$

On introduit:

$$(5.15) \quad \mathcal{K} = \mathcal{A}^{-1}(\mathcal{U}_{ad}) = \text{ensemble convexe fermé (non vide) de } H^1(\Gamma).$$

Avec ces notations, le problème (5.8) équivaut à :

$$(5.16) \quad \left| \begin{array}{l} \int_{\Gamma} (\varphi_{\varepsilon} - (z_d - y(0))) (\varphi - \varphi_{\varepsilon}) d\Gamma + \varepsilon \int_{\Gamma} \mathcal{A} \varphi_{\varepsilon} \mathcal{A} (\varphi - \varphi_{\varepsilon}) d\Gamma \geq 0, \\ \varphi_{\varepsilon} \in \mathcal{K}, \forall \varphi \in \mathcal{K}. \end{array} \right.$$

Posons :

$$(5.17) \quad g = z_d - y(0).$$

Alors (5.16) équivaut à :

$$(5.18) \quad \varepsilon \int_{\Gamma} \mathcal{A} \varphi_{\varepsilon} \mathcal{A} (\varphi - \varphi_{\varepsilon}) d\Gamma + \int_{\Gamma} \varphi_{\varepsilon} (\varphi - \varphi_{\varepsilon}) d\Gamma \geq \int_{\Gamma} g (\varphi - \varphi_{\varepsilon}) d\Gamma, \forall \varphi \in \mathcal{K}.$$

C'est un problème de perturbations singulières pour des inéquations variationnelles (Cf. D. Huet [1], J. L. Lions [4] [5]). Le résultat est alors le suivant: on introduit

$$(5.19) \quad \bar{\mathcal{K}} = \text{adhérence de } \mathcal{K} \text{ dans } L^2(\Gamma),$$

et soit  $\varphi_0$  la solution dans  $\bar{\mathcal{K}}$  de :

$$(5.20) \quad \int_{\Gamma} \varphi_0 (\varphi - \varphi_0) d\Gamma \geq \int_{\Gamma} g (\varphi - \varphi_0) d\Gamma, \forall \varphi \in \bar{\mathcal{K}},$$

i.e.

$$(5.21) \quad \varphi_0 = \text{Proj.}_{\bar{\mathcal{K}}} g = \text{projection sur } \bar{\mathcal{K}} \text{ dans } L^2(\Gamma) \text{ de } g.$$

On a alors :

$$(5.22) \quad \varphi_{\varepsilon} \rightarrow \varphi_0 \text{ dans } L^2(\Gamma).$$

Par conséquent :

THÉORÈME 5.1. Lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ , on a :

$$(5.23) \quad y_{\varepsilon} \Big|_{\Gamma} = y(u_{\varepsilon}) \Big|_{\Gamma} \rightarrow y(0) + \text{Proj.}_{\bar{\mathcal{K}}} (z_d - y(0)) \text{ dans } L^2(\Gamma).$$

On en déduit que :

$$(5.24) \quad u_{\varepsilon} = \mathcal{A} \varphi_{\varepsilon} \rightarrow u_0 = \mathcal{A} \varphi_0 \text{ dans } H^{-1}(\Gamma).$$

En général  $\varphi_0$  n'est pas dans  $H^1(\Gamma)$  de sorte que  $\mathcal{A} \varphi_0$  n'est pas dans  $L^2(\Gamma)$  de sorte que le résultat (5.24) ne peut pas en général être amélioré.

*Remarque 5.1.*

Si  $\varphi_0 \in H^1(\Gamma)$  (et donc à  $\mathcal{K}$ ) alors  $\varphi_\varepsilon \rightarrow \varphi_0$  dans  $H^1(\Gamma)$  et dans ce cas  $u_\varepsilon \rightarrow u_0$  dans  $L^2(\Gamma)$ .

*Exemple 5.1.*

Prenons le cas « sans contraintes »

$$(5.25) \quad \mathcal{U}_{ad} = L^2(\Gamma).$$

Alors  $\mathcal{A}^{-1} \mathcal{U}_{ad} = H^1(\Gamma)$  et  $\overline{\mathcal{K}} = L^2(\Gamma)$ . Donc  $\varphi_0 = z_d - y(o)$  et par conséquent:

$$(5.26) \quad y(u_\varepsilon) \Big|_{\Gamma} \rightarrow z_d \text{ dans } L^2(\Gamma).$$

Pour obtenir  $u_0$ , on résout:

$$(5.27) \quad A \phi_0 = 0, \phi_0 = z_d \text{ sur } \Gamma$$

et alors:

$$(5.28) \quad u_0 = \frac{\partial \phi_0}{\partial \nu}.$$

*Exemple 5.2.*

Soit  $\mathcal{L}$  une variété régulière de dimension  $(n-2)$  contenue dans  $\Gamma$ . Supposons que:

$$(5.29) \quad \mathcal{K} = \{ \varphi \mid \varphi \in H^1(\Gamma), \varphi = 0 \text{ sur } \mathcal{L} \}.$$

Alors  $\overline{\mathcal{K}} = L^2(\Gamma)$ . On a alors:

$$\varphi_\varepsilon \rightarrow g \text{ dans } L^2(\Gamma).$$

Si l'on fait l'hypothèse que  $g \in H^1(\Gamma)$ , on peut utiliser Lions [4] [5] pour définir des correcteurs  $\theta_\varepsilon$  par:

$$(5.30) \quad \left| \begin{array}{l} \theta_\varepsilon + g \in \mathcal{K}, \\ \varepsilon \int_{\Gamma} \mathcal{A} \theta_\varepsilon \mathcal{A} (\varphi - \theta_\varepsilon) d\Gamma + \int_{\Gamma} \theta_\varepsilon (\varphi - \theta_\varepsilon) d\Gamma \geq \\ \int_{\Gamma} (\varepsilon g_{\varepsilon 1} + \varepsilon^{1/2} g_{\varepsilon 2}) (\varphi - \theta_\varepsilon) d\Gamma \\ \forall \varphi \text{ avec } \varphi + g \in \mathcal{K}, \end{array} \right.$$

où

$$\left| \int_{\Gamma} g_{\varepsilon 1} \varphi d\Gamma \right| \leq c \|\varphi\|_{H^1(\Gamma)}, \quad \forall \varphi \in \mathcal{K},$$

$$\left| \int_{\Gamma} g_{\varepsilon 1} \varphi d\Gamma \right| \leq c \|\varphi\|_{L^2(\Gamma)}, \quad \forall \varphi \in \mathcal{K}.$$

On a alors:

$$(5.31) \quad \varphi_{\varepsilon} - (g + \theta_{\varepsilon}) \rightarrow 0 \text{ dans } H^1(\Gamma).$$

Le calcul de  $\theta_{\varepsilon}$  est un calcul de couche limite pour un opérateur pseudo-différentiel ( $\mathcal{A}$ ). Nous renvoyons pour cela à Demidov [1], Pokrovski [1].

Comme variante on peut prendre:

$$(5.29 \text{ bis}) \quad \mathcal{K} = \{\varphi \mid \varphi \in H^1(\Gamma), \varphi = y(o) \text{ sur } \mathcal{L}\}.$$

Cela signifie que  $\mathcal{U}_{ad}$  est l'ensemble des  $v$  tels que:

$$(5.32) \quad y(v) = 0 \text{ sur } \mathcal{L}.$$

Donc  $\mathcal{U}_{ad}$  est définie à partir des contraintes sur l'état, une situation fréquente dans les applications.

Evidemment, on a encore ici un phénomène de couche limite au voisinage de  $\mathcal{L}$  lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

### Remarque 5.2.

On trouvera dans Lions [4] [5] l'analyse d'autres situations du même type (mais plus délicates).

### 5.3. Cas d'un système non linéaire

On considère maintenant le système dont l'état est donné par:

$$(5.33) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\Delta y + \beta(y) = 0 \text{ dans } \Omega, \\ \frac{\partial y}{\partial \nu} = v \text{ sur } \Gamma \end{array} \right.$$

où  $\lambda \rightarrow \beta(\lambda)$  est une fonction continue strictement croissante de  $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ , nulle à l'origine. Dans (5.33), on suppose que  $v \in L^2(\Gamma)$ ; le problème (5.33) admet une solution unique telle que:

$$(5.34) \quad y \in H^1(\Omega)$$

et

$$(5.35) \quad \int_{\Omega} y \beta(y) dx < \infty.$$

La fonction coût est encore donnée par:

$$(5.36) \quad J_{\varepsilon}(v) = \int_{\Gamma} |y(v) - z_d|^2 d\Gamma + \varepsilon \int_{\Gamma} v^2 d\Gamma,$$

et  $\mathcal{U}_{ad}$  est encore un ensemble fermé convexe non vide de  $L^2(\Gamma)$ .

On vérifie sans peine qu'il existe  $u_{\varepsilon} \in \mathcal{U}_{ad}$  tel que:

$$(5.37) \quad J_{\varepsilon}(u_{\varepsilon}) = \inf J_{\varepsilon}(v), v \in \mathcal{U}_{ad}$$

mais la fonction  $v \rightarrow J_{\varepsilon}(v)$  n'ayant pas de raison d'être convexe, il n'y a aucune raison pour que  $u_{\varepsilon}$  soit unique.

*Remarque 5.3.*

On pourra trouver dans Lions [2], Chapitre 3, n° 2, des exemples d'équations d'état non linéaires conduisant à des fonctions coût *convexes*.

*Remarque 5.4.*

Il serait intéressant de pouvoir donner des « estimations topologiques » du *nombre éventuel* de solutions du problème (5.37).

Notre objet est maintenant de faire tendre  $\varepsilon$  vers 0.

De manière formelle, lorsque  $\mathcal{U}_{ad} = L^2(\Gamma)$ , on considère le problème de Dirichlet non homogène

$$(5.38) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\Delta\phi_0 + \beta(\phi_0) = 0, \\ \phi_0|_{\Gamma} = z_d \end{array} \right.$$

qui admet une solution unique dans  $H^1(\Omega)$  si  $z_d \in H^{1/2}(\Gamma)$ .

Faisons l'hypothèse (de régularité sur  $z_d$  et sur  $\beta$ ) que:

$$(5.39) \quad u_0 = \frac{\partial\phi_0}{\partial\nu} \Big|_{\Gamma} \in L^2(\Gamma).$$

On a alors:

(5.40)  $\left| \begin{array}{l} u_\varepsilon \text{ étant une solution quelconque de (5.37), } u_\varepsilon \rightarrow u_0 \text{ dans} \\ L^2(\Gamma) \text{ faible.} \end{array} \right.$

En effet, on note que (en posant  $|\varphi|^2 = \int_\Gamma \varphi^2 d\Gamma$ ):

$$\varepsilon |u_\varepsilon|^2 \leq J_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq J_\varepsilon(u_0) = \varepsilon |u_0|^2$$

donc:

$$(5.41) \quad |u_\varepsilon| \leq |u_0|.$$

On peut donc extraire une suite, encore notée  $u_\varepsilon$ , telle que:

$$(5.42) \quad u_\varepsilon \rightarrow w \text{ dans } L^2(\Gamma) \text{ faible.}$$

On vérifie sans peine que  $y(u_\varepsilon) \rightarrow y(w)$  dans  $H^1(\Gamma)$  faible et qu'alors:

$$(5.43) \quad J_\varepsilon(u_\varepsilon) \rightarrow J(w) = \int_\Gamma |y(w) - z_d|^2 d\Gamma.$$

Mais:

$$J_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq J_\varepsilon(v) \quad \forall v \in L^2(\Gamma) \text{ donne, avec (5.43):}$$

$$J(w) \leq J(v) \quad \forall v \in L^2(\Gamma)$$

donc  $J(w) \leq J(u_0) = 0$  donc  $y(w) \Big|_\Gamma = z_d$  donc  $y(w) = \phi_0$ , donc  $w = u_0$ , d'où (5.40).

A la lumière des résultats du n° 5.2., on peut conjecturer que sans l'hypothèse de régularité (5.39),  $u_\varepsilon$  converge vers  $u_0$  dans un espace « plus grand » que  $L^2(\Gamma)$ .

Ce problème est ouvert; pour un peu en préciser l'énoncé, on est conduit à la question des problèmes « non linéaires non homogènes » qui est abordée au n° suivant.

#### 5.4. Remarques sur certains problèmes elliptiques non linéaires non homogènes

Avec un changement de notations par rapport à (5.38), on étudie le problème suivant: trouver  $\phi$  solution de

$$(5.44) \quad \left| \begin{array}{l} -\Delta\phi + \beta(\phi) = 0, \\ \phi \Big|_\Gamma = g \end{array} \right.$$

où  $g$  est, *par exemple*, donné dans  $L^2(\Gamma)$  (le problème est facile si  $g \in H^{1/2}(\Gamma)$ ).

Il faut évidemment introduire (puisqu'il en est déjà ainsi dans les cas *linéaires* analogues; Cf. Lions-Magenes [1], Chapitre 2) des solutions *faibles* de (5.44): on dira que  $\phi$  est *solution faible* de (5.44) si:

$$(5.45) \quad (\phi, -\Delta\psi) + (\beta(\phi), \psi) = - \int_{\Gamma} g \frac{\partial\psi}{\partial\nu} d\Gamma$$

pour toute fonction  $\psi$  « régulière » dans  $\Omega$  et *nulle sur*  $\Gamma$  (on a posé  $(\phi, \psi) = \int_{\Omega} \phi \psi dx$ ).

Cela posé, on a le résultat suivant, dû à H. Brezis [1].

THÉORÈME 5.2. *Soit*  $\delta(x) =$  *distance de*  $x$  *à*  $\Gamma$ . *Si*  $g$  *est donné dans*  $L^1(\Gamma)$  *le problème (5.45) admet une solution unique telle que :*

$$(5.46) \quad \phi \in L^1(\Omega),$$

$$(5.47) \quad \delta \beta(\phi) \in L^1(\Omega),$$

*et où dans (5.45) on peut prendre*  $\psi \in H^{2,\infty}(\Omega) \cap H_{0}^{1,\infty}(\Omega)$ .

*En outre l'application*  $g \rightarrow \phi = \phi(g)$  *est Lipschitzienne, au sens suivant :*

*Si*  $g_i \in L^1(\Gamma)$  *et si*  $\phi(g_i) = \phi_i$ , *on a :*

$$(5.48) \quad \left| \begin{array}{l} \|\phi_1 - \phi_2\|_{L^1(\Omega)} + \|\delta\beta(\phi_1) - \delta\beta(\phi_2)\|_{L^1(\Omega)} \\ \leq c \|g_1 - g_2\|_{L^1(\Gamma)}. \end{array} \right.$$

On va maintenant appliquer *la théorie de l'interpolation non linéaire* (Cf. Lions [6], J. Peetre [1]).

On vérifie sans peine que:

$$(5.49) \quad \|\phi\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|g\|_{L^\infty(\Gamma)}.$$

L'application  $g \rightarrow \phi = \phi(g)$  vérifie donc (5.49) et

$$(5.50) \quad \|\phi(g_1) - \phi(g_2)\|_{L^1(\Omega)} \leq c \|g_1 - g_2\|_{L^1(\Gamma)}.$$

On peut alors *interpoler* entre ces estimations (Cf. Lions [6]) et l'on en déduit le

<sup>1)</sup> I.e.  $\psi, \frac{\partial\psi}{\partial x_i}, \frac{\partial^2\psi}{\partial x_i \partial x_j} \in L^\infty(\Omega), \psi = 0$  sur  $\Gamma$ .

THÉOREME 5.3. Pour  $g \in L^p(\Gamma)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , le problème (5.45) admet une solution  $\phi(g)$  unique dans  $L^p(\Omega)$ .

On a en outre :

$$(5.51) \quad \|\phi(g)\|_{L^p(\Omega)} \leq c \|g\|_{L^p(\Gamma)}.$$

Remarque 5.5.

On peut en outre montrer que dans les conditions du Théorème précédent :

$$(5.52) \quad \delta^{1/p} \beta(\phi) \in L^p(\Omega).$$

Remarque 5.6.

Si en particulier  $g \in L^2(\Gamma)$ , alors la solution faible de (5.44) vérifie :  $\phi \in L^2(\Omega)$ ,  $\delta^{1/2} \beta(\phi) \in L^2(\Omega)$  (donc  $\delta^{1/2} \Delta \phi \in L^2(\Omega)$ ).

Il ne semble pas que l'on puisse définir  $\frac{\partial \phi}{\partial \nu}$  dans ces conditions. Mais

si  $g \in L^p(\Gamma)$ ,  $p > 2$ , alors on peut définir  $\frac{\partial \phi}{\partial \nu}$  dans un espace de distributions sur  $\Gamma$ , par adaptation des méthodes de Lions-Magenes [1].

Pour d'autres résultats et d'autres applications de l'interpolation non linéaire, cf. L. Tartar [2].

## 6. PROBLÈMES DE GESTION OPTIMALE ET INÉQUATIONS VARIATIONNELLES

### 6.1. Un problème de gestion optimale <sup>1)</sup>

Soit  $s$  l'instant initial,  $s \in [0, T]$  et soit  $x$  le stock de produits à l'instant  $s$ .

On se donne un processus de Wiener  $f(t)$  ( $f(0) = 0$ ) qui représente la demande cumulée jusqu'à l'instant  $t$ ; si l'on pose :

$$(6.1) \quad E f(t) = \mu(t)$$

on a :

$$(6.2) \quad E(f(t) - \mu(t)(f(s) - \mu(s))) = \int_0^{\min(t,s)} \sigma^2(\tau) d\tau.$$

<sup>1)</sup> Les résultats des n° 6.1 et 6.2 sont dus à Bensoussan et l'auteur [2] [3] et à Bensoussan, Goursat et l'auteur [1]; nous renvoyons aux articles détaillés des ces auteurs pour les (longs) détails techniques.