Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 19 (1973)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LE CONTRÔLE OPTIMAL DE SYSTÈMES DISTRIBUÉS

Autor: Lions, J. L.

Kapitel: 4.2. Cas non différentiable

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-46289

4.2. *Cas non différentiable*

Voici un exemple de problème de contrôle intervenant également en biochimie. L'état est donné par l'équation:

$$\frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \sigma \frac{y}{1+y} = f + v \,,\ x \in \,]0, 1[\,,\ t \in \,]0, T[, \tag{4.12}$$

donc équation analogue à (4.1), avec cette fois *le contrôle distribué* $v \in \overline{\mathcal{U}}_{ad}$, où

$$\left| \begin{array}{l} \overline{\mathcal{U}}_{ad} = \text{ensemble fermé convexe non vide de } L^2(Q), \text{ contenu dans} \\ \text{les fonctions p.p. } \geqslant 0 \text{ dans } Q. \end{array} \right. \tag{4.13}$$

La *condition initiale* est identique à (4.2). Les *conditions aux limites* sont les suivantes: soit $h \geqslant 0$ donné; alors c étant une constante > 0,

$$-\frac{\partial y}{\partial x}(\mathrm{o}, t) = -c(y-h)^+\Big|_{x=0} \,,\ \frac{\partial y}{\partial x}(1, t) = -c(y-h)^+\Big|_{x=1} . \tag{4.14}$$

On vérifie encore que le problème (4.12) (4.2) (4.14) *admet une solution unique*, soit $y = y(v)$. Si la fonction coût est encore donnée par (4.7), le problème:

$$\operatorname{Inf} J(v) \,,\ v \in \overline{\mathcal{U}}_{ad} \tag{4.15}$$

admet encore une solution (au moins), soit u.

Mais la fonction $\lambda \to \lambda^+$ n'étant pas différentiable à l'origine, l'application $v \to y(v)$ de $L^2(Q) \to L^2(Q)$ n'est plus différentiable, et l'obtention de conditions d'optimalité semble une question ouverte.

Remarque 4.3.

Du point de vue *numérique* (Cf. Yvon [1]) on introduit une fonction $\lambda \to \gamma(\lambda)$ *approximation différentiable* de $\lambda \to \lambda^+$ et l'on remplace (4.14) par:

$$\left| \begin{array}{l} -\dfrac{\partial y}{\partial x}(\mathrm{o}, t) = -c\,\gamma(y(\mathrm{o}, t) - h), \\[2ex] \dfrac{\partial y}{\partial x}(1, t) = \quad c\,\gamma(y(1, t) - h). \end{array} \right. \tag{4.16}$$