Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 19 (1973)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LE CONTRÔLE OPTIMAL DE SYSTÈMES DISTRIBUÉS
Autor: Lions, J. L.
Kapitel: 4.1. Cas différentiable
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-46289

d'où, en tenant compte de la 2e équation (3.37):

$$- \int_{\Omega} h(x)\,\psi^{-}(x, s)\,dx + \int_{\Omega \times]s,T[} (\Lambda\psi)(\Lambda\psi^{-})\,dx\,dt$$
$$- \frac{1}{N} \int_{\Omega \times]s,T[} (\psi^{-})^2\,dx\,dt = 0$$

d'où:

$$\int_{\Omega} h(x)\,\psi^{-}(x, s)\,dx + \int_{\Omega \times]s,T[} (\Lambda\psi^{-})^2\,dx\,dt + \frac{1}{N} \int_{\Omega \times]s,T[} (\psi^{-})^2\,dx\,dt = 0. \tag{3.54}$$

Comme $h \geqslant 0$, tous les termes sont positifs, donc $\psi^{-} = 0$.

Remarque 3.6.

On rencontre d'autres systèmes du type (3.51) pour des opérateurs paraboliques (Cf. Lions [1] [2]). D'autres systèmes, encore du même type, ont été obtenus à propos de problèmes stochastiques par Bismut [1].

Des études *directes* de ces systèmes (et d'autres, n'entrant pas, apparemment, dans le cadre de la théorie du contrôle) ont été faites par Da Prato et Temam, les résultats les plus complets étant obtenus, à partir de méthodes itératives nouvelles, par L. Tartar [1].

Remarque 3.7.

Le noyau P dépend du paramètre $N : P = P_N$. On montre (Cf. Lions [3]) que $P_N(x, \xi, t)$ *décroît* (p.p.) lorsque N *décroît* et que lorsque $N \to 0$, $P_N(x, \xi, t) \to 0$, au sens:

$$\forall\, h \in L^2(\Omega)\,,\ \forall\, t \in [0, T]\,,\ \iint_{\Omega \times \Omega} P_N(x, \xi, t)\,h(x)\,h(\xi)\,dx\,d\xi \to 0.$$

4. Equations d'état non linéaires

4.1. *Cas différentiable*

Nous avons jusqu'ici considéré des cas où l'*équation d'état* du système était *linéaire*. On rencontre dans les applications de nombreuses situations (c'est même, en fait, la situation habituelle!) où l'équation d'état est *non linéaire*.

On peut distinguer deux cas, selon que l'application $v \to y(v)$ est, ou non, différentiable.

Donnons un exemple de problème intervenant en biochimie [1]); l'état (qui représente une concentration) est donné par:

$$(4.1) \quad \left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial y}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \sigma \dfrac{y}{1+y} = f, \; x \in]0,1[, \; t \in]0,T[, \\[2ex] \sigma = \text{constante} > 0, \end{array} \right.$$

$$(4.2) \qquad y(x, \mathrm{o}) = y_0(x), \; x \in]0,1[$$

$$(4.3) \qquad -\frac{\partial y}{\partial x}(\mathrm{o}, t) = v(t), \; \frac{\partial y}{\partial x}(1, t) = 0, \; t \in]0,T[.$$

Les données f et y_0 et le contrôle v sont $\geqslant 0$.

On vérifie sans peine (Cf. les détails dans Kernevez [1]) que ce problème admet une *solution unique*, vérifiant:

$$(4.4) \qquad y, \frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \frac{\partial y}{\partial t} \in L^2(Q), \; Q = \Omega \times]0,T[, \; \Omega =]0,1[,$$

$$(4.5) \qquad y \geqslant 0.$$

On peut, par exemple, commencer par résoudre le problème:

$$(4.6) \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \sigma \frac{\varphi}{1 + |\varphi|} = f,$$

avec les conditions (4.2) (4.3) inchangées, puis l'on vérifie que la solution φ de (4.6) (4.2) (4.3) est $\geqslant 0$, donc $\varphi = y$.

La solution de (4.1) (4.2) (4.3) étant notée $y(v)$, on considère la *fonction coût*:

$$(4.7) \qquad J(v) = \int_Q |y(v) - z_d|^2 \, dx \, dt + N \int_0^T v^2 \, dt,$$

où z_d est donnée dans $L^2(Q)$.

Il est facile de voir que le problème:

$$(4.8) \qquad \inf J(v), \; v \in \mathscr{U}_{ad}$$

---

[1]) On trouvera dans les travaux de Kernevez et Thomas (Cf. la bibliographie) de très nombreux autres problèmes de contrôle en biochimie; on donne ici l'un des exemples les plus simples. Cf. aussi Brauner et Penel [1].

où

$$\mathscr{U}_{ad} = \text{ensemble convexe fermé non vide de } L^2(0, T), \text{ contenu dans l'ensemble des fonctions } \geqslant 0 \text{ p.p. sur } (0, T) \tag{4.9}$$

admet une solution (au moins).

Pour obtenir des conditions *nécessaires* d'optimalité, on utilise alors le fait que la fonction $v \to y(v)$ est *différentiable* de $\{L^2(0, T), v \geqslant 0\}$ dans $L^2(Q)$. Si l'on pose:

$$\bar{y} = \frac{d}{d\lambda} y(u + \lambda v)\,|_{\lambda=0} \tag{4.10}$$

on vérifie que:

$$\left|\begin{aligned} & \frac{\partial \bar{y}}{\partial t} - \frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial x^2} + \sigma \frac{\bar{y}}{1 + y} - \sigma \frac{\bar{y}\, y}{(1 + y)^2} = 0, \\ & \bar{y}(x, \mathrm{o}) = 0, \\ & -\frac{\partial \bar{y}}{\partial x}(\mathrm{o}, t) = v(t)\,, \frac{\partial \bar{y}}{\partial x}(1, t) = 0, \end{aligned}\right. \tag{4.11}$$

où $y = y(u)$.

On introduit alors l'état adjoint et l'on obtient les conditions d'optimalité par des intégrations par parties (Cf. Kernevez [1], Lions [2]).

Remarque 4.1.

La fonction $v \to J(v)$ n'a pas de raison d'être convexe, et il n'y a donc pas de raison d'avoir unicité de la solution. Il serait intéressant d'étudier le *nombre* éventuel des solutions (minima globaux ou locaux). Nous rencontrerons encore des questions de ce type au n° 5 (Cf. par exemple Remarque 5.4.).

Remarque 4.2.

On trouvera d'autres exemples, relatifs à des problèmes de conduite de chauffe d'un four, dans J. P. Yvon [1].