

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 19 (1973)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** SUR LE CONTRÔLE OPTIMAL DE SYSTÈMES DISTRIBUÉS  
**Autor:** Lions, J. L.  
**Kapitel:** 4.1. Cas différentiable  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-46289>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 25.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

d'où, en tenant compte de la 2<sup>e</sup> équation (3.37):

$$-\int_{\Omega} h(x) \psi^-(x, s) dx + \int_{\Omega \times ]s, T[} (\wedge \psi) (\wedge \psi^-) dx dt - \frac{1}{N} \int_{\Omega \times ]s, T[} (\psi^-)^2 dx dt = 0$$

d'où:

$$(3.54) \quad \int_{\Omega} h(x) \psi^-(x, s) dx + \int_{\Omega \times ]s, T[} (\wedge \psi^-)^2 dx dt + \frac{1}{N} \int_{\Omega \times ]s, T[} (\psi^-)^2 dx dt = 0.$$

Comme  $h \geq 0$ , tous les termes sont positifs, donc  $\psi^- = 0$ .

*Remarque 3.6.*

On rencontre d'autres systèmes du type (3.51) pour des opérateurs paraboliques (Cf. Lions [1] [2]). D'autres systèmes, encore du même type, ont été obtenus à propos de problèmes stochastiques par Bismut [1].

Des études *directes* de ces systèmes (et d'autres, n'entrant pas, apparemment, dans le cadre de la théorie du contrôle) ont été faites par Da Prato et Temam, les résultats les plus complets étant obtenus, à partir de méthodes itératives nouvelles, par L. Tartar [1].

*Remarque 3.7.*

Le noyau  $P$  dépend du paramètre  $N : P = P_N$ . On montre (Cf. Lions [3]) que  $P_N(x, \xi, t)$  décroît (p.p.) lorsque  $N$  décroît et que lorsque  $N \rightarrow 0$ ,  $P_N(x, \xi, t) \rightarrow 0$ , au sens:

$$\forall h \in L^2(\Omega), \forall t \in [0, T], \iint_{\Omega \times \Omega} P_N(x, \xi, t) h(x) h(\xi) dx d\xi \rightarrow 0.$$

#### 4. EQUATIONS D'ÉTAT NON LINÉAIRES

##### 4.1. Cas différentiable

Nous avons jusqu'ici considéré des cas où l'équation d'état du système était *linéaire*. On rencontre dans les applications de nombreuses situations (c'est même, en fait, la situation habituelle!) où l'équation d'état est *non linéaire*.

On peut distinguer deux cas, selon que l'application  $v \rightarrow y(v)$  est, ou non, différentiable.

Donnons un exemple de problème intervenant en biochimie <sup>1)</sup>; l'état (qui représente une concentration) est donné par:

$$(4.1) \quad \left| \begin{array}{l} \frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \sigma \frac{y}{1+y} = f, \quad x \in ]0, 1[, \quad t \in ]0, T[, \\ \sigma = \text{constante} > 0, \end{array} \right.$$

$$(4.2) \quad y(x, 0) = y_0(x), \quad x \in ]0, 1[$$

$$(4.3) \quad -\frac{\partial y}{\partial x}(0, t) = v(t), \quad \frac{\partial y}{\partial x}(1, t) = 0, \quad t \in ]0, T[.$$

Les données  $f$  et  $y_0$  et le contrôle  $v$  sont  $\geq 0$ .

On vérifie sans peine (Cf. les détails dans Kernevez [1]) que ce problème admet une *solution unique*, vérifiant:

$$(4.4) \quad y, \frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \frac{\partial y}{\partial t} \in L^2(Q), \quad Q = \Omega \times ]0, T[, \quad \Omega = ]0, 1[$$

$$(4.5) \quad y \geq 0.$$

On peut, par exemple, commencer par résoudre le problème:

$$(4.6) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \sigma \frac{\varphi}{1+|\varphi|} = f,$$

avec les conditions (4.2) (4.3) inchangées, puis l'on vérifie que la solution  $\varphi$  de (4.6) (4.2) (4.3) est  $\geq 0$ , donc  $\varphi = y$ .

La solution de (4.1) (4.2) (4.3) étant notée  $y(v)$ , on considère la *fonction coût*:

$$(4.7) \quad J(v) = \int_Q |y(v) - z_d|^2 dx dt + N \int_0^T v^2 dt,$$

où  $z_d$  est donnée dans  $L^2(Q)$ .

Il est facile de voir que le problème:

$$(4.8) \quad \inf J(v), \quad v \in \mathcal{U}_{ad}$$

<sup>1)</sup> On trouvera dans les travaux de Kernevez et Thomas (Cf. la bibliographie) de très nombreux autres problèmes de contrôle en biochimie; on donne ici l'un des exemples les plus simples. Cf. aussi Brauner et Penel [1].

où

$$(4.9) \quad \mathcal{U}_{ad} = \text{ensemble convexe fermé non vide de } L^2(0, T), \text{ contenu dans l'ensemble des fonctions } \geq 0 \text{ p.p. sur } (0, T)$$

admet une solution (au moins).

Pour obtenir des conditions *nécessaires* d'optimalité, on utilise alors le fait que la fonction  $v \rightarrow y(v)$  est *différentiable* de  $\{L^2(0, T), v \geq 0\}$  dans  $L^2(Q)$ . Si l'on pose:

$$(4.10) \quad \bar{y} = \frac{d}{d\lambda} y(u + \lambda v) \big|_{\lambda=0}$$

on vérifie que:

$$(4.11) \quad \begin{cases} \frac{\partial \bar{y}}{\partial t} - \frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial x^2} + \sigma \frac{\bar{y}}{1+y} - \sigma \frac{\bar{y} y}{(1+y)^2} = 0, \\ \bar{y}(x, 0) = 0, \\ -\frac{\partial \bar{y}}{\partial x}(0, t) = v(t), \quad \frac{\partial \bar{y}}{\partial x}(1, t) = 0, \end{cases}$$

où  $y = y(u)$ .

On introduit alors l'état adjoint et l'on obtient les conditions d'optimalité par des intégrations par parties (Cf. Kernevez [1], Lions [2]).

#### Remarque 4.1.

La fonction  $v \rightarrow J(v)$  n'a pas de raison d'être convexe, et il n'y a donc pas de raison d'avoir unicité de la solution. Il serait intéressant d'étudier le nombre éventuel des solutions (minima globaux ou locaux). Nous rencontrerons encore des questions de ce type au n° 5 (Cf. par exemple Remarque 5.4.).

#### Remarque 4.2.

On trouvera d'autres exemples, relatifs à des problèmes de conduite de chauffe d'un four, dans J. P. Yvon [1].