

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 19 (1973)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** SUR LE CONTRÔLE OPTIMAL DE SYSTÈMES DISTRIBUÉS  
**Autor:** Lions, J. L.  
**Kapitel:** 3.4. Cas sans contrainte — Equation intégro-différentielle de Riccati  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-46289>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 27.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

$$\begin{aligned}
 (3.33) \quad X &= -N(\Pi(\varphi_1) - \Pi(\varphi_2), (\varphi_1 - \varphi_2)^-)_Q \\
 &= N \int_Q (\Pi(\varphi_1) - \Pi(\varphi_2))(\varphi_1 - \varphi_2) dx dt \\
 &\quad \varphi_1 \leq \varphi_2.
 \end{aligned}$$

Mais on vérifie que  $(\Pi(\varphi_1) - \Pi(\varphi_2))(\varphi_1 - \varphi_2) \geq 0$  p.p. d'où

$$(3.34) \quad X \geq 0.$$

D'après (3.26), le 2<sup>e</sup> membre de (3.32) est  $\leq 0$ , ce qui, avec (3.34) donne:

$$\wedge q^+ = 0.$$

Comme  $q^+ = 0$  sur  $\Sigma_+$  et  $q^+(x, T) = 0$ , on a  $q^+ = 0$  d'où (3.27).

#### 3.4. Cas sans contrainte — Equation intégral-différentielle de Riccati

Considérons maintenant, toujours dans le cadre du système (3.16), le cas « sans contraintes », i.e.

$$(3.35) \quad \mathcal{U}_{ad} = L^2(Q).$$

Alors (3.16) s'écrit:

$$\begin{aligned}
 (3.36) \quad & \left. \begin{aligned}
 \frac{\partial y}{\partial t} + Ay + \frac{p}{N} &= f, \\
 -\frac{\partial p}{\partial t} + A^*p - y &= -z_d, \\
 y &= 0 \text{ sur } \Sigma_-, \quad p = 0 \text{ sur } \Sigma_+, \\
 y(x, 0) &= y_0(x), \quad p(x, T) = 0 \text{ sur } \Omega;
 \end{aligned} \right\}
 \end{aligned}$$

il s'agit maintenant d'un problème *linéaire* avec des conditions aux limites pour  $t = 0$  et  $t = T$ . Il est connu (Cf. Lions [1]) que tous les systèmes de ce genre peuvent se ramener à la résolution d'une équation *non linéaire* d'évolution et d'une équation hyperbolique linéaire.

On va expliciter cela, sans donner les détails des démonstrations.

On considère le système pour  $s < t < T$  où  $s$  est fixé (quelconque) dans  $]0, T[$ :

$$(3.37) \quad \left. \begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + A \varphi + \frac{1}{N} \psi &= 0, \\ -\frac{\partial \psi}{\partial t} + A^* \psi - \varphi &= 0, \\ \varphi &= 0 \text{ sur } \Gamma_- X]s, T[, \quad \psi = 0 \text{ sur } \Gamma_+ X]s, T[ \\ \varphi(x, s) &= h(x), \quad \psi(x, T) = 0 \text{ sur } \Omega \end{aligned} \right\}$$

qui admet une solution unique; en fait il s'agit là du système d'optimalité pour le problème suivant: l'état est donné par  $\bar{y}(v)$  solution de:

$$(3.38) \quad \frac{\partial \bar{y}}{\partial t} + A \bar{y} = v, \quad \bar{y}(s) = h, \quad t > s$$

et la fonction coût par:

$$(3.39) \quad \int_s^T |\bar{y}(v)|^2 dt + N \int_s^T |v|^2 dt = \mathcal{J}_s^h(v)$$

(où  $|v|^2 = \int_{\Omega} v(x)^2 dx$ ), et on minimise  $\mathcal{J}_s^h(v)$  sans contraintes.

Donc le système (3.37) admet une solution unique, donc définit de manière unique  $\psi(s) \in L^2(\Omega)$ .

L'application  $h \rightarrow \psi(s)$  est linéaire continu de  $L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ , donc:

$$(3.40) \quad \psi(s) = P(s) h, \quad P(s) \in \mathcal{L}(H; H), \quad H = L^2(\Omega).$$

On vérifie alors que l'on a l'identité (Cf. Lions, loc. cit.)

$$(3.41) \quad p(t) = P(t) y(t) + r(t).$$

On peut calculer  $P$  et  $r$  par un *calcul d'identification* (il faut vérifier que les calculs effectués ci-après de façon formelle sont loisisbles). On

obtient, (en posant de manière générale  $\frac{dg}{dt} = g'$ ),

$$(3.42) \quad -P'y - Py' - r' + A^*Py + A^*r - y = -z_d,$$

et en remplaçant dans (3.42)  $y'$  par sa valeur tirée de la première équation (3.36), on a finalement:

$$(3.43) \quad -P'y + P\left(Ay + \frac{P}{N} - f\right) - r' + A^*Py + A^*r - y = -z_d.$$

On peut encore remplacer dans (3.43)  $p$  par sa valeur (3.41), d'où:

$$-P'y + PAy + A^*Py + \frac{1}{N}PPy - y - r' + A^*r + \frac{1}{N}Pr - Pf = -z_d$$

et cela est une identité en  $y$ , d'où:

$$(3.44) \quad -\frac{\partial P}{\partial t} + PA + A^*P + \frac{1}{N}P \circ P = I$$

et

$$(3.45) \quad -\frac{\partial r}{\partial t} + A^*r + \frac{1}{N}Pr = Pf - z_d.$$

Comme  $p(T) = 0$ , on doit avoir:

$$(3.46) \quad P(T) = 0, r(T) = 0.$$

On vérifie enfin à partir de (3.37) que:

$$(3.47) \quad P(t)^* = P(t) \text{ dans } \mathcal{L}(H; H)$$

et que

$$(3.48) \quad P(t) \geq 0 \text{ dans } \mathcal{L}(H; H).$$

Plus précisément, on vérifie que:

$$(3.49) \quad (P(s)h, h) = \inf_v \mathcal{J}_s^h(v).$$

On note encore que:

$$(3.50) \quad P(t)h \in D(A^*), r(t) \in D(A^*).$$

D'après le théorème des noyaux de L. Schwartz [1], on peut représenter (de façon unique), l'opérateur  $P(t)$  par un *noyau*  $P(x, \xi, t)$  et on peut résumer les informations ci-dessus dans l'ensemble des conditions suivantes:

$$(3.51) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial P}{\partial t} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (a_i(x) P(x, \xi, t)) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \xi_i} (a_i(\xi) P(x, \xi, t)) \\ + \frac{1}{N} \int_{\Omega} P(x, \xi, t) P(\xi, \xi, t) d\xi = \delta(x - \xi) \text{ dans } \Omega \times \Omega \times ]0, T[, \\ P(x, \xi, t) = P(\xi, x, t), \end{array} \right.$$

$$P(x, \xi, t) = 0 \text{ si } x \in \Gamma_+, \xi \in \Omega, t \in ]0, T[,$$

$$P(x, \xi, T) = 0 \text{ sur } \Omega \times \Omega,$$

$$\forall h \in L^2(\Omega), \int_{\Omega} P(x, \xi, t) h(\xi) d\xi \in L^2(\Omega) \text{ et}$$

$$\iint_{\Omega \times \Omega} P(x, \xi, t) h(x) h(\xi) dx d\xi \geq 0.$$

Ce problème admet une solution unique. La fonction  $r = r(x, t)$  est ensuite déterminée par :

$$(3.52) \quad \left\{ \begin{aligned} & -\frac{\partial r}{\partial t} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (a_i(x) r(x, t)) + \frac{1}{N} \int_{\Omega} P(x, \xi, t) r(\xi) d\xi \\ & = \int_{\Omega} P(x, \xi, t) f(\xi, t) d\xi - z_d(x, t), \\ & r(x, t) = 0 \text{ si } x \in \Gamma_+, t \in ]0, T[, \\ & r(x, T) = 0. \end{aligned} \right.$$

On va maintenant démontrer le

THÉORÈME 3.2. La solution  $P(x, \xi, t)$  de (3.51) vérifie :

$$(3.53) \quad P(x, \xi, t) \geq 0 \text{ p.p. sur } \Omega \times \Omega.$$

*Démonstration*

Considérons le système (3.37) avec  $h$  donnée  $\geq 0$  p.p. dans  $\Omega$ .

On aura (3.53) si l'on montre que  $\psi \geq 0$  p.p. dans  $\Omega \times ]s, T[$ . Pour cela, on multiplie la 1<sup>re</sup> équation (3.37) par  $\psi^-$ , il vient :

$$\int_{\Omega \times ]s, T[} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} + A\varphi \right) \psi^- dx dt - \frac{1}{N} \int_{\Omega \times ]s, T[} (\psi^-)^2 dx dt = 0;$$

intégrant par parties et posant  $\Lambda = -\frac{\partial}{\partial t} + A^*$ , il vient :

$$- \int_{\Omega} h(x) \psi^-(x, s) dx + \int_{\Omega \times ]s, T[} \varphi (\Lambda \psi^-) dx dt - \frac{1}{N} \int_{\Omega \times ]s, T[} (\psi^-)^2 dx dt = 0$$

d'où, en tenant compte de la 2<sup>e</sup> équation (3.37):

$$-\int_{\Omega} h(x) \psi^{-}(x, s) dx + \int_{\Omega \times ]s, T[} (\wedge \psi) (\wedge \psi^{-}) dx dt - \frac{1}{N} \int_{\Omega \times ]s, T[} (\psi^{-})^2 dx dt = 0$$

d'où:

$$(3.54) \quad \int_{\Omega} h(x) \psi^{-}(x, s) dx + \int_{\Omega \times ]s, T[} (\wedge \psi^{-})^2 dx dt + \frac{1}{N} \int_{\Omega \times ]s, T[} (\psi^{-})^2 dx dt = 0.$$

Comme  $h \geq 0$ , tous les termes sont positifs, donc  $\psi^{-} = 0$ .

*Remarque 3.6.*

On rencontre d'autres systèmes du type (3.51) pour des opérateurs paraboliques (Cf. Lions [1] [2]). D'autres systèmes, encore du même type, ont été obtenus à propos de problèmes stochastiques par Bismut [1].

Des études *directes* de ces systèmes (et d'autres, n'entrant pas, apparemment, dans le cadre de la théorie du contrôle) ont été faites par Da Prato et Temam, les résultats les plus complets étant obtenus, à partir de méthodes itératives nouvelles, par L. Tartar [1].

*Remarque 3.7.*

Le noyau  $P$  dépend du paramètre  $N : P = P_N$ . On montre (Cf. Lions [3]) que  $P_N(x, \xi, t)$  décroît (p.p.) lorsque  $N$  décroît et que lorsque  $N \rightarrow 0$ ,  $P_N(x, \xi, t) \rightarrow 0$ , au sens:

$$\forall h \in L^2(\Omega), \forall t \in [0, T], \iint_{\Omega \times \Omega} P_N(x, \xi, t) h(x) h(\xi) dx d\xi \rightarrow 0.$$

## 4. EQUATIONS D'ÉTAT NON LINÉAIRES

### 4.1. Cas différentiable

Nous avons jusqu'ici considéré des cas où l'équation d'état du système était *linéaire*. On rencontre dans les applications de nombreuses situations (c'est même, en fait, la situation habituelle!) où l'équation d'état est *non linéaire*.