

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 19 (1973)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LE CONTRÔLE OPTIMAL DE SYSTÈMES DISTRIBUÉS
Autor: Lions, J. L.
Kapitel: 3.3. Propriétés de comparaison
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-46289>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 13.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

$$(3.24) \quad \begin{aligned} & \frac{\partial y}{\partial t} + Ay - \frac{p^-}{N} = f, \\ & -\frac{\partial p}{\partial t} + A^*p - y = z_d, \\ & y = 0 \text{ sur } \Sigma_-, p = 0 \text{ sur } \Sigma_+, \\ & y(x, 0) = y_0(x), p(x, T) = 0 \text{ sur } \Omega. \end{aligned}$$

On voit l'importance (puisque $u = \frac{p^-}{N}$) de la « surface de commutation » séparant la région où $p > 0$ de celle où $p < 0$, le contrôle u étant *nul* dans la 1^{re} région.

Remarque 3.5.

Pour une étude systématique des divers systèmes d'optimalité pour des équations d'état de natures variées et pour des contrôles distribués ou *frontière*, nous renvoyons à Lions [1] [2]. On fait en particulier usage, dans le cas des contrôles frontière, de la théorie des problèmes aux limites *non homogènes* telle qu'exposée dans Lions-Magenes [1].

3.3. Propriétés de comparaison

On suppose maintenant que \mathcal{U}_{ad} est donné par:

$$(3.25) \quad \begin{aligned} \mathcal{U}_{ad} = \{v \mid v \in L^2(Q), \alpha(x, t) \leq v(x, t) \leq \beta(x, t) \text{ p.p.,} \\ \alpha \text{ et } \beta \text{ étant deux fonctions mesurables quelconques}\}. \end{aligned}$$

On suppose dans (3.16) que z_d et N sont fixés¹⁾. On désigne par $\{y_i, p_i\}$ ($i = 1, 2$) la solution de (3.24) correspondant à $f = f_i$, $y_0 = y_{0i}$. On a alors le:

THÉORÈME 3.1. *On suppose que (3.25) a lieu et que*

$$(3.26) \quad f_1 \leq f_2, y_{01} \leq y_{02} \text{ p.p.}$$

¹⁾ On trouvera d'autres cas dans Lions [3].

On a alors :

$$(3.27) \quad p_1 \leqslant p_2 \text{ (et donc } u_1 \geqslant u_2 \text{) p.p. dans } Q.$$

Démonstration

Posons: $z = y_1 - y_2$, $q = p_1 - p_2$. On déduit de (3.16) que:

$$(3.28) \quad \left| \begin{array}{l} \frac{\partial z}{\partial t} + Az - \left(\Pi \left(-\frac{p_1}{N} \right) - \Pi \left(-\frac{p_2}{N} \right) \right) = f_1 - f_2, \\ -\frac{\partial q}{\partial t} + A^* q - z = 0, \\ z = 0 \text{ sur } \Sigma_-, q = 0 \text{ sur } \Sigma_+, \\ z(x, 0) = y_{01}(x) - y_{02}(x), q(x, T) = 0 \text{ dans } \Omega. \end{array} \right.$$

On pose $(\varphi, \psi)_Q = \int_Q \varphi \psi \, dx \, dt$, $(\varphi, \psi) = \int_\Omega \varphi \psi \, dx$. On multiplie la 1^{re} équation (3.28) par q^+ et l'on intègre sur Q . Il vient:

$$(3.29) \quad \left(z, \left(-\frac{\partial}{\partial t} + A^* \right) q^+ \right)_Q - (y_{01} - y_{02}, q^+(0)) + X = (f_1 - f_2, q^+)_Q$$

où

$$(3.30) \quad X = - \left(\Pi \left(-\frac{p_1}{N} \right) - \Pi \left(-\frac{p_2}{N} \right), (p_1 - p_2)^+ \right)_Q.$$

Utilisant la 2^e équation (3.28) et posant $\Lambda = -\frac{\partial}{\partial t} + A^*$, on peut écrire (3.29) sous la forme:

$$(3.31) \quad (\Lambda q, \Lambda q^+)_Q + X = (f_1 - f_2, q^+)_Q + (y_{01} - y_{02}, q^+(0)),$$

d'où, comme Λ est un opérateur différentiel du 1^{er} ordre

$$(3.32) \quad |\Lambda q^+|_Q^2 + X = (f_1 - f_2, q^+)_Q + (y_{01} - y_{02}, q^+(0)).$$

Si l'on pose $-\frac{p_i}{N} = \varphi_i$, on a:

$$\begin{aligned}
 (3.33) \quad X &= -N(\Pi(\varphi_1) - \Pi(\varphi_2), (\varphi_1 - \varphi_2)^-)_{\Omega} \\
 &= N \int_{\Omega} (\Pi(\varphi_1) - \Pi(\varphi_2))(\varphi_1 - \varphi_2) dx dt \\
 &\quad \varphi_1 \leqslant \varphi_2.
 \end{aligned}$$

Mais on vérifie que $(\Pi(\varphi_1) - \Pi(\varphi_2))(\varphi_1 - \varphi_2) \geqslant 0$ p.p. d'où

$$(3.34) \quad X \geqslant 0.$$

D'après (3.26), le 2^e membre de (3.32) est $\leqslant 0$, ce qui, avec (3.34) donne:

$$\wedge q^+ = 0.$$

Comme $q^+ = 0$ sur Σ_+ et $q^+(x, T) = 0$, on a $q^+ = 0$ d'où (3.27).

3.4. Cas sans contrainte – Equation intégro-différentielle de Riccati

Considérons maintenant, toujours dans le cadre du système (3.16), le cas « *sans contraintes* », i.e.

$$(3.35) \quad \mathcal{U}_{ad} = L^2(Q).$$

Alors (3.16) s'écrit:

$$\begin{aligned}
 (3.36) \quad & \frac{\partial y}{\partial t} + Ay + \frac{p}{N} = f, \\
 & -\frac{\partial p}{\partial t} + A^*p - y = -z_d, \\
 & y = 0 \text{ sur } \Sigma_-, p = 0 \text{ sur } \Sigma_+, \\
 & y(x, 0) = y_0(x), p(x, T) = 0 \text{ sur } \Omega;
 \end{aligned}$$

il s'agit maintenant d'un problème *linéaire* avec des conditions aux limites pour $t = 0$ et $t = T$. Il est connu (Cf. Lions [1]) que tous les systèmes de ce genre peuvent se ramener à la résolution d'une équation *non linéaire* d'évolution et d'une équation hyperbolique linéaire.

On va expliciter cela, sans donner les détails des démonstrations.

On considère le système pour $s < t < T$ où s est fixé (quelconque) dans $]0, T[$: