$$
(3.24) \quad \left| \begin{aligned}
&\frac{\partial y}{\partial t} + Ay - \frac{p^-}{N} = f, \\
&-\frac{\partial p}{\partial t} + A^* p - y = z_d, \\
&y = 0 \text{ sur } \Sigma_- , p = 0 \text{ sur } \Sigma_+, \\
&y(x, o) = y_0(x) , p(x, T) = 0 \text{ sur } \Omega.
\end{aligned} \right.
$$

On voit l'importance $\left(\text{puisque } u = \frac{p^-}{N}\right)$ de la « surface de commutation » séparant la région où $p > 0$ de celle où $p < 0$, le contrôle u étant *nul* dans la 1re région.

Remarque 3.5.

Pour une étude systématique des divers systèmes d'optimalité pour des équations d'état de natures variées et pour des contrôles distribués ou *frontière*, nous renvoyons à Lions [1] [2]. On fait en particulier usage, dans le cas des contrôles frontière, de la théorie des problèmes aux limites *non homogènes* telle qu'exposée dans Lions-Magenes [1].

3.3. *Propriétés de comparaison*

On suppose maintenant que $\mathcal{U}_{ad}$ est donné par:

$$
(3.25) \quad \left| \begin{aligned}
&\mathcal{U}_{ad} = \{v \mid v \in L^2(Q) , \alpha(x, t) \leqslant v(x, t) \leqslant \beta(x, t) \text{ p.p.}, \\
&\alpha \text{ et } \beta \text{ étant deux fonctions mesurables quelconques}\}.
\end{aligned} \right.
$$

On suppose dans (3.16) que z_d et N sont *fixés* [1]). On désigne par $\{y_i, p_i\}$ $(i = 1, 2)$ la solution de (3.24) correspondant à $f = f_i, y_0 = y_{0i}$. On a alors le:

THÉORÈME 3.1. *On suppose que* (3.25) *a lieu et que*

$$
(3.26) \qquad f_1 \leqslant f_2 , y_{01} \leqslant y_{02} \text{ p.p.}
$$

[1]) On trouvera d'autres cas dans Lions [3].

On a alors:

$$p_1 \leqslant p_2 \text{ (et donc } u_1 \geqslant u_2\text{) p.p. dans } Q. \tag{3.27}$$

Démonstration

Posons: $z = y_1 - y_2$, $q = p_1 - p_2$. On déduit de (3.16) que:

$$\left|\begin{aligned} &\frac{\partial z}{\partial t} + Az - \left(\Pi\left(-\frac{p_1}{N}\right) - \Pi\left(-\frac{p_2}{N}\right)\right) = f_1 - f_2, \\ &-\frac{\partial q}{\partial t} + A^* q - z = 0, \\ &z = 0 \textit{ sur } \Sigma_- ,\ q = 0 \textit{ sur } \Sigma_+, \\ &z(x, \mathrm{o}) = y_{01}(x) - y_{02}(x),\ q(x, T) = 0 \text{ dans } \Omega. \end{aligned}\right. \tag{3.28}$$

On pose $(\varphi, \psi)_Q = \int_Q \varphi\psi\, dx\, dt$, $(\varphi, \psi) = \int_\Omega \varphi\psi\, dx$. On multiplie la 1re équation (3.28) par q^+ et l'on intègre sur Q. Il vient:

$$\left(z, \left(-\frac{\partial}{\partial t} + A^*\right)q^+\right)_Q - (y_{01} - y_{02}, q^+(\mathrm{o})) + X = (f_1 - f_2, q^+)_Q \tag{3.29}$$

où

$$X = -\left(\Pi\left(-\frac{p_1}{N}\right) - \Pi\left(-\frac{p_2}{N}\right), (p_1 - p_2)^+\right)_Q. \tag{3.30}$$

Utilisant la 2e équation (3.28) et posant $\Lambda = -\frac{\partial}{\partial t} + A^*$, on peut écrire (3.29) sous la forme:

$$(\Lambda q, \Lambda q^+)_Q + X = (f_1 - f_2, q^+)_Q + (y_{01} - y_{02}, q^+(\mathrm{o})), \tag{3.31}$$

d'où, *comme Λ est un opérateur différentiel du 1er ordre*

$$|\Lambda q^+|_Q^2 + X = (f_1 - f_2, q^+)_Q + (y_{01} - y_{02}, q^+(\mathrm{o})). \tag{3.32}$$

Si l'on pose $-\frac{p_i}{N} = \varphi_i$, on a:

$$
(3.33) \quad \left| \begin{aligned} X &= -N\big(\Pi(\varphi_1) - \Pi(\varphi_2)\,,(\varphi_1 - \varphi_2)^-\big)_Q \\ &= N\int_Q \big(\Pi(\varphi_1) - \Pi(\varphi_2)\big)(\varphi_1 - \varphi_2)\,dx\,dt \\ &\varphi_1 \leqslant \varphi_2. \end{aligned} \right.
$$

Mais on vérifie que $(\Pi(\varphi_1) - \Pi(\varphi_2))(\varphi_1 - \varphi_2) \geqslant 0$ p.p. d'où

$$
(3.34) \qquad X \geqslant 0.
$$

D'après (3.26), le 2e membre de (3.32) est $\leqslant 0$, ce qui, avec (3.34) donne:

$$
\Lambda q^+ = 0.
$$

Comme $q^+ = 0$ sur Σ_+ et $q^+(x, T) = 0$, on a $q^+ = 0$ d'où (3.27).

3.4. *Cas sans contrainte — Equation intégro-différentielle de Riccati*

Considérons maintenant, toujours dans le cadre du système (3.16), le cas « *sans contraintes* », i.e.

$$
(3.35) \qquad \mathcal{U}_{ad} = L^2(Q).
$$

Alors (3.16) s'écrit:

$$
(3.36) \quad \left| \begin{aligned} &\frac{\partial y}{\partial t} + Ay + \frac{p}{N} = f, \\ &-\frac{\partial p}{\partial t} + A^*p - y = -z_d, \\ &y = 0 \text{ sur } \Sigma_-\,,\ p = 0 \text{ sur } \Sigma_+, \\ &y(x, \mathrm{o}) = y_0(x)\,,\ p(x, T) = 0 \text{ sur } \Omega; \end{aligned} \right.
$$

il s'agit maintenant d'un problème *linéaire* avec des conditions aux limites pour $t = 0$ et $t = T$. Il est connu (Cf. Lions [1]) que tous les systèmes de ce genre peuvent se ramener à la résolution d'une équation *non linéaire* d'évolution et d'une équation hyperbolique linéaire.

On va expliciter cela, sans donner les détails des démonstrations.

On considère le système pour $s < t < T$ où s est fixé (quelconque) dans $]0, T[$: