

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 19 (1973)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LE CONTRÔLE OPTIMAL DE SYSTÈMES DISTRIBUÉS
Autor: Lions, J. L.
Kapitel: 3.2. Système d'optimalité
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-46289>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 25.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

et où $v \in \mathcal{U}_{ad}$ avec:

$$(3.6) \quad \mathcal{U}_{ad} = \text{ensemble convexe fermé non vide de } L^2(Q).$$

Remarque 3.1.

Il s'agit donc dans le problème précédent d'un *contrôle distribué*. (Cf. à ce sujet la Remarque 3.3. ci-après).

La *fonction coût* est donnée par:

$$(3.7) \quad J(v) = \int_Q |y(v) - z_d|^2 dx dt + N \int_Q v^2 dx dt,$$

où z_d est donnée dans $L^2(Q)$ et où N est donné > 0 .

Le problème

$$(3.8) \quad \inf_{v \in \mathcal{U}_{ad}} J(v)$$

admet une solution unique (vérification immédiate) pour laquelle nous allons écrire le « *système d'optimalité* ».

3.2. *Système d'optimalité*

Soit u la solution de (3.8). On pose $y(u) = y$ et l'on définit l'*état adjoint* p par¹⁾:

$$(3.9) \quad - \frac{\partial p}{\partial t} + A^* p = y - z_d,$$

$$(3.10) \quad p = 0 \text{ sur } \Sigma_+ = \Gamma_+ \times]0, T[,$$

$$(3.11) \quad p(x, T) = 0 \text{ sur } \Omega.$$

Le contrôle u est *caractérisé* par:

$$(3.12) \quad \int_Q (y - z_d)(y(v) - y) dx dt + N \int_Q u(v - u) dx dt \geq 0, \quad \forall v \in \mathcal{U}_{ad}.$$

Mais on déduit facilement de (3.9), (3.10), (3.11) que:

$$\int_Q (y - z_d)(y(v) - y) dx dt = \int_Q p(v - u) dx dt$$

¹⁾ A^* est défini par $A^* \varphi = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (a_i \varphi)$.

de sorte que (3.12) équivaut à:

$$(3.13) \quad \int_Q (p + Nu) (v - u) \, dx \, dt \geq 0, \quad \forall v \in \mathcal{U}_{ad}.$$

Introduisons:

$$(3.14) \quad \Pi = \text{opérateur de projection dans } L^2(Q) \text{ sur } \mathcal{U}_{ad}.$$

Alors (3.13) équivaut à:

$$(3.15) \quad u = \Pi \left(-\frac{p}{N} \right),$$

Par conséquent, *le contrôle optimal est donné par la résolution du système en $\{y, p\}$* :

$$(3.16) \quad \left| \begin{array}{l} \frac{\partial y}{\partial t} + Ay - \Pi \left(-\frac{p}{N} \right) = f, \\ -\frac{\partial p}{\partial t} + A^*p - y = -z_d, \\ y = 0 \text{ sur } \Sigma_-, \quad p = 0 \text{ sur } \Sigma_+, \\ y(x, 0) = y_0(x), \quad p(x, T) = 0 \text{ sur } \Omega, \end{array} \right.$$

puis par (3.15).

Remarque 3.2.

Puisque le problème (3.16) équivaut au problème initial, le système *non linéaire* (3.16) *admet une solution unique*.

Remarque 3.3.

Supposons que le contrôle ne soit plus distribué mais de la forme:

$$(3.17) \quad v(x, t) = \sum_{i=1}^m v_i(t) w_i(t)$$

où les fonctions w_i sont *données* dans $L^2(\Omega)$ (et en général dans les applications à support compact « assez petit »), les fonctions v_i étant les contrôles, assujettis aux contraintes:

$$(3.18) \quad v_i \in \mathcal{U}_{i, ad} = \text{convexe fermé non vide de } L^2(0, T), \quad i = 1, \dots, m.$$

Supposons la fonction coût donnée alors par:

$$(3.19) \quad \left| \begin{array}{l} J(v) = \int_Q |y(v) - z_d|^2 dx dt + \sum_{i=1}^m N_i \int_0^T v^2 dt, \\ N_i > 0. \end{array} \right.$$

Soit $u = \{u_1, \dots, u_m\}$ le contrôle optimal. Le système de l'optimalité est maintenant donné de la façon suivante: soit

$$(3.20) \quad \Pi_i = \text{opérateur de projection dans } L^2(0, T) \text{ sur } \mathcal{U}_{i, ad};$$

alors:

$$(3.21) \quad \left| \begin{array}{l} \frac{\partial y}{\partial t} + Ay - \sum_{i=1}^m \Pi_i \left(-\frac{p_i}{N_i} \right) w_i = f, \\ -\frac{\partial p}{\partial t} + A^*p - y = -z_d, \\ p_i(t) = \int_{\Omega} p(x, t) w_i(x) dx, \\ y = 0 \text{ sur } \Sigma_-, p = 0 \text{ sur } \Sigma_+, \\ y(x, 0) = y_0(x), p(x, T) = 0 \text{ sur } \Omega, \end{array} \right.$$

et

$$(3.22) \quad u_i = \Pi_i \left(-\frac{p_i}{N_i} \right).$$

Nous ignorons dans quelle mesure on peut étendre à (3.21) les résultats de comparaison relatifs à (3.16) établis au n° 3.3. ci-après.

Remarque 3.4.

Si l'on prend *par exemple*:

$$(3.23) \quad \mathcal{U}_{ad} = \{v \mid v \geq 0 \text{ p.p. dans } Q\},$$

alors $\Pi(\varphi) = \varphi^+ (= \sup(\varphi, 0))$, de sorte que (3.16) devient dans ce cas:

$$\begin{aligned}
 (3.24) \quad & \frac{\partial y}{\partial t} + Ay - \frac{p^-}{N} = f, \\
 & -\frac{\partial p}{\partial t} + A^*p - y = z_d, \\
 & y = 0 \text{ sur } \Sigma_-, p = 0 \text{ sur } \Sigma_+, \\
 & y(x, 0) = y_0(x), p(x, T) = 0 \text{ sur } \Omega.
 \end{aligned}$$

On voit l'importance (puisque $u = \frac{p^-}{N}$) de la « surface de commutation » séparant la région où $p > 0$ de celle où $p < 0$, le contrôle u étant *nul* dans la 1^{re} région.

Remarque 3.5.

Pour une étude systématique des divers systèmes d'optimalité pour des équations d'état de natures variées et pour des contrôles distribués ou *frontière*, nous renvoyons à Lions [1] [2]. On fait en particulier usage, dans le cas des contrôles frontière, de la théorie des problèmes aux limites *non homogènes* telle qu'exposée dans Lions-Magenes [1].

3.3. Propriétés de comparaison

On suppose maintenant que \mathcal{U}_{ad} est donné par:

$$\begin{aligned}
 (3.25) \quad & \mathcal{U}_{ad} = \{v \mid v \in L^2(Q), \alpha(x, t) \leq v(x, t) \leq \beta(x, t) \text{ p.p.,} \\
 & \alpha \text{ et } \beta \text{ étant deux fonctions mesurables quelconques}\}.
 \end{aligned}$$

On suppose dans (3.16) que z_d et N sont *fixés*¹⁾. On désigne par $\{y_i, p_i\}$ ($i = 1, 2$) la solution de (3.24) correspondant à $f = f_i$, $y_0 = y_{0i}$. On a alors le:

THÉORÈME 3.1. *On suppose que (3.25) a lieu et que*

$$(3.26) \quad f_1 \leq f_2, y_{01} \leq y_{02} \text{ p.p.}$$

¹⁾ On trouvera d'autres cas dans Lions [3].