

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 19 (1973)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LE CONTRÔLE OPTIMAL DE SYSTÈMES DISTRIBUÉS
Autor: Lions, J. L.
Kapitel: 3. Cas linéaire quadratique — Remarques sur le système d'optimalité
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-46289>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 25.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

3. CAS LINÉAIRE QUADRATIQUE — REMARQUES SUR LE SYSTÈME D'OPTIMALITÉ

3.1. Un système hyperbolique

On reprend ici certains points de Lions [3]: dans un ouvert borné Ω de \mathbf{R}^n de frontière Γ régulière, on considère l'opérateur A défini par:

$$(3.1) \quad A\varphi = \sum_{i=1}^n a_i(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$$

où les fonctions $a_i \in C^1(\bar{\Omega})$; [on pourrait aussi bien considérer des fonctions dépendant de x et t ; nous nous bornons au cas où les a_i ne dépendent pas de t uniquement pour un peu simplifier l'exposé]. On introduit:

$$\Gamma_- = \{x \mid x \in \Gamma, \sum_{i=1}^n a_i(x) \nu_i \leq 0\}$$

$$\Gamma_+ = \{x \mid x \in \Gamma, \sum_{i=1}^n a_i(x) \nu_i \geq 0\}$$

où $\nu = \{\nu_i\}$ désigne la normale à Γ dirigée vers l'extérieur de Ω .

On suppose que l'état $y = y(v) = y(x, t; v)$ du système est défini par la solution du *problème mixte hyperbolique*:

$$(3.2) \quad \frac{\partial y}{\partial t} + Ay = f + v \text{ dans } Q = \Omega \times]0, T[,$$

$$(3.3) \quad y = 0 \text{ sur } \Sigma_- = \Gamma_- \times]0, T[,$$

$$(3.4) \quad y(x, 0) = y_0(x), \quad x \in \Omega$$

où f et y_0 sont donnés avec:

$$(3.5) \quad f \in L^2(Q), \quad y_0 \in L^2(\Omega)$$

et où $v \in \mathcal{U}_{ad}$ avec:

$$(3.6) \quad \mathcal{U}_{ad} = \text{ensemble convexe fermé non vide de } L^2(Q).$$

Remarque 3.1.

Il s'agit donc dans le problème précédent d'un *contrôle distribué*. (Cf. à ce sujet la Remarque 3.3. ci-après).

La *fonction coût* est donnée par:

$$(3.7) \quad J(v) = \int_Q |y(v) - z_d|^2 dx dt + N \int_Q v^2 dx dt,$$

où z_d est donnée dans $L^2(Q)$ et où N est donné > 0 .

Le problème

$$(3.8) \quad \inf_{v \in \mathcal{U}_{ad}} J(v)$$

admet une *solution unique* (vérification immédiate) pour laquelle nous allons écrire le « *système d'optimalité* ».

3.2. Système d'optimalité

Soit u la solution de (3.8). On pose $y(u) = y$ et l'on définit l'état adjoint p par ¹⁾:

$$(3.9) \quad -\frac{\partial p}{\partial t} + A^*p = y - z_d,$$

$$(3.10) \quad p = 0 \text{ sur } \Sigma_+ = \Gamma_+ \times]0, T[,$$

$$(3.11) \quad p(x, T) = 0 \text{ sur } \Omega.$$

Le contrôle u est *caractérisé* par:

$$(3.12) \quad \int_Q (y - z_d)(y(v) - y) dx dt + N \int_Q u(v - u) dx dt \geq 0, \forall v \in \mathcal{U}_{ad}.$$

Mais on déduit facilement de (3.9), (3.10), (3.11) que:

$$\int_Q (y - z_d)(y(v) - y) dx dt = \int_Q p(v - u) dx dt$$

¹⁾ A^* est défini par $A^* \varphi = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (a_i \varphi)$.

de sorte que (3.12) équivaut à :

$$(3.13) \quad \int_{\Omega} (p + Nu) (v - u) \, dx \, dt \geq 0, \quad \forall v \in \mathcal{U}_{ad}.$$

Introduisons :

$$(3.14) \quad \Pi = \text{opérateur de projection dans } L^2(Q) \text{ sur } \mathcal{U}_{ad}.$$

Alors (3.13) équivaut à :

$$(3.15) \quad u = \Pi \left(-\frac{p}{N} \right),$$

Par conséquent, *le contrôle optimal est donné par la résolution du système en $\{y, p\}$:*

$$(3.16) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial y}{\partial t} + Ay - \Pi \left(-\frac{p}{N} \right) = f, \\ \\ -\frac{\partial p}{\partial t} + A^*p - y = -z_d, \\ \\ y = 0 \text{ sur } \Sigma_-, \quad p = 0 \text{ sur } \Sigma_+, \\ \\ y(x, 0) = y_0(x), \quad p(x, T) = 0 \text{ sur } \Omega, \end{array} \right.$$

puis par (3.15).

Remarque 3.2.

Puisque le problème (3.16) équivaut au problème initial, le système *non linéaire* (3.16) *admet une solution unique.*

Remarque 3.3.

Supposons que le contrôle ne soit plus distribué mais de la forme :

$$(3.17) \quad v(x, t) = \sum_{i=1}^m v_i(t) w_i(t)$$

où les fonctions w_i sont *données* dans $L^2(\Omega)$ (et en général dans les applications à support compact « assez petit »), les fonctions v_i étant les contrôles, assujettis aux contraintes :

$$(3.18) \quad v_i \in \mathcal{U}_{i, ad} = \text{convexe fermé non vide de } L^2(0, T), \quad i = 1, \dots, m.$$

Supposons la fonction coût donnée alors par:

$$(3.19) \quad \left| \begin{array}{l} J(v) = \int_Q |y(v) - z_d|^2 dx dt + \sum_{i=1}^m N_i \int_0^T v^2 dt, \\ N_i > 0. \end{array} \right.$$

Soit $u = \{u_1, \dots, u_m\}$ le contrôle optimal. Le système de l'optimalité est maintenant donné de la façon suivante: soit

$$(3.20) \quad \Pi_i = \text{opérateur de projection dans } L^2(0, T) \text{ sur } \mathcal{U}_{i,ad};$$

alors:

$$(3.21) \quad \left| \begin{array}{l} \frac{\partial y}{\partial t} + Ay - \sum_{i=1}^m \Pi_i \left(-\frac{p_i}{N_i} \right) w_i = f, \\ -\frac{\partial p}{\partial t} + A^*p - y = -z_d, \\ p_i(t) = \int_{\Omega} p(x, t) w_i(x) dx, \\ y = 0 \text{ sur } \Sigma_-, p = 0 \text{ sur } \Sigma_+, \\ y(x, 0) = y_0(x), p(x, T) = 0 \text{ sur } \Omega, \end{array} \right.$$

et

$$(3.22) \quad u_i = \Pi_i \left(-\frac{p_i}{N_i} \right).$$

Nous ignorons dans quelle mesure on peut étendre à (3.21) les résultats de comparaison relatifs à (3.16) établis au n° 3.3. ci-après.

Remarque 3.4.

Si l'on prend *par exemple*:

$$(3.23) \quad \mathcal{U}_{ad} = \{v \mid v \geq 0 \text{ p.p. dans } Q\},$$

alors $\Pi(\varphi) = \varphi^+ (= \sup(\varphi, 0))$, de sorte que (3.16) devient dans ce cas:

$$(3.24) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial y}{\partial t} + Ay - \frac{p^-}{N} = f, \\ \\ -\frac{\partial p}{\partial t} + A^*p - y = z_d, \\ \\ y = 0 \text{ sur } \Sigma_-, p = 0 \text{ sur } \Sigma_+, \\ \\ y(x, 0) = y_0(x), p(x, T) = 0 \text{ sur } \Omega. \end{array} \right.$$

On voit l'importance (puisque $u = \frac{p^-}{N}$) de la « surface de commutation » séparant la région où $p > 0$ de celle où $p < 0$, le contrôle u étant nul dans la 1^{re} région.

Remarque 3.5.

Pour une étude systématique des divers systèmes d'optimalité pour des équations d'état de natures variées et pour des contrôles distribués ou frontière, nous renvoyons à Lions [1] [2]. On fait en particulier usage, dans le cas des contrôles frontière, de la théorie des problèmes aux limites non homogènes telle qu'exposée dans Lions-Magenes [1].

3.3. Propriétés de comparaison

On suppose maintenant que \mathcal{U}_{ad} est donné par :

$$(3.25) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{U}_{ad} = \{v \mid v \in L^2(Q), \alpha(x, t) \leq v(x, t) \leq \beta(x, t) \text{ p.p.}, \\ \alpha \text{ et } \beta \text{ étant deux fonctions mesurables quelconques} \}. \end{array} \right.$$

On suppose dans (3.16) que z_d et N sont fixés ¹⁾. On désigne par $\{y_i, p_i\}$ ($i = 1, 2$) la solution de (3.24) correspondant à $f = f_i, y_0 = y_{0i}$. On a alors le :

THÉORÈME 3.1. *On suppose que (3.25) a lieu et que*

$$(3.26) \quad f_1 \leq f_2, y_{01} \leq y_{02} \text{ p.p.}$$

¹⁾ On trouvera d'autres cas dans Lions [3].

On a alors :

$$(3.27) \quad p_1 \leq p_2 \text{ (et donc } u_1 \geq u_2) \text{ p.p. dans } Q.$$

Démonstration

Posons: $z = y_1 - y_2$, $q = p_1 - p_2$. On déduit de (3.16) que:

$$(3.28) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial z}{\partial t} + Az - \left(\Pi \left(-\frac{p_1}{N} \right) - \Pi \left(-\frac{p_2}{N} \right) \right) = f_1 - f_2, \\ \\ -\frac{\partial q}{\partial t} + A^* q - z = 0, \\ \\ z = 0 \text{ sur } \Sigma_-, \quad q = 0 \text{ sur } \Sigma_+, \\ \\ z(x, 0) = y_{01}(x) - y_{02}(x), \quad q(x, T) = 0 \text{ dans } \Omega. \end{array} \right.$$

On pose $(\varphi, \psi)_Q = \int_Q \varphi \psi \, dx \, dt$, $(\varphi, \psi) = \int_\Omega \varphi \psi \, dx$. On multiplie la 1^{re} équation (3.28) par q^+ et l'on intègre sur Q . Il vient:

$$(3.29) \quad \left(z, \left(-\frac{\partial}{\partial t} + A^* \right) q^+ \right)_Q - (y_{01} - y_{02}, q^+(0)) + X = (f_1 - f_2, q^+)_Q$$

où

$$(3.30) \quad X = - \left(\Pi \left(-\frac{p_1}{N} \right) - \Pi \left(-\frac{p_2}{N} \right), (p_1 - p_2)^+ \right)_Q.$$

Utilisant la 2^e équation (3.28) et posant $\Lambda = -\frac{\partial}{\partial t} + A^*$, on peut écrire (3.29) sous la forme:

$$(3.31) \quad (\Lambda q, \Lambda q^+)_Q + X = (f_1 - f_2, q^+)_Q + (y_{01} - y_{02}, q^+(0)),$$

d'où, comme Λ est un opérateur différentiel du 1^{er} ordre

$$(3.32) \quad \|\Lambda q^+\|_Q^2 + X = (f_1 - f_2, q^+)_Q + (y_{01} - y_{02}, q^+(0)).$$

Si l'on pose $-\frac{p_i}{N} = \varphi_i$, on a:

$$\begin{aligned}
 (3.33) \quad X &= -N \left(\Pi(\varphi_1) - \Pi(\varphi_2), (\varphi_1 - \varphi_2)^- \right)_Q \\
 &= N \int_Q \left(\Pi(\varphi_1) - \Pi(\varphi_2) \right) (\varphi_1 - \varphi_2) dx dt \\
 &\quad \varphi_1 \leq \varphi_2.
 \end{aligned}$$

Mais on vérifie que $(\Pi(\varphi_1) - \Pi(\varphi_2))(\varphi_1 - \varphi_2) \geq 0$ p.p. d'où

$$(3.34) \quad X \geq 0.$$

D'après (3.26), le 2^e membre de (3.32) est ≤ 0 , ce qui, avec (3.34) donne:

$$\Lambda q^+ = 0.$$

Comme $q^+ = 0$ sur Σ_+ et $q^+(x, T) = 0$, on a $q^+ = 0$ d'où (3.27).

3.4. Cas sans contrainte — Equation intégrro-différentielle de Riccati

Considérons maintenant, toujours dans le cadre du système (3.16), le cas « sans contraintes », i.e.

$$(3.35) \quad \mathcal{U}_{ad} = L^2(Q).$$

Alors (3.16) s'écrit:

$$\begin{aligned}
 (3.36) \quad & \frac{\partial y}{\partial t} + Ay + \frac{p}{N} = f, \\
 & -\frac{\partial p}{\partial t} + A^*p - y = -z_d, \\
 & y = 0 \text{ sur } \Sigma_-, \quad p = 0 \text{ sur } \Sigma_+, \\
 & y(x, 0) = y_0(x), \quad p(x, T) = 0 \text{ sur } \Omega;
 \end{aligned}$$

il s'agit maintenant d'un problème *linéaire* avec des conditions aux limites pour $t = 0$ et $t = T$. Il est connu (Cf. Lions [1]) que tous les systèmes de ce genre peuvent se ramener à la résolution d'une équation *non linéaire* d'évolution et d'une équation hyperbolique linéaire.

On va expliciter cela, sans donner les détails des démonstrations.

On considère le système pour $s < t < T$ où s est fixé (quelconque) dans $]0, T[$:

$$(3.37) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + A \varphi + \frac{1}{N} \psi = 0, \\ -\frac{\partial \psi}{\partial t} + A^* \psi - \varphi = 0, \\ \varphi = 0 \text{ sur } \Gamma_- X] s, T[, \psi = 0 \text{ sur } \Gamma_+ X] s, T[\\ \varphi(x, s) = h(x), \psi(x, T) = 0 \text{ sur } \Omega \end{array} \right.$$

qui admet une solution unique; en fait il s'agit là du système d'optimalité pour le problème suivant: l'état est donné par $\bar{y}(v)$ solution de:

$$(3.38) \quad \frac{\partial \bar{y}}{\partial t} + A \bar{y} = v, \bar{y}(s) = h, t > s$$

et la fonction coût par:

$$(3.39) \quad \int_s^T |\bar{y}(v)|^2 dt + N \int_s^T |v|^2 dt = \mathcal{J}_s^h(v)$$

(où $|v|^2 = \int_{\Omega} v(x)^2 dx$), et on minimise $\mathcal{J}_s^h(v)$ sans contraintes.

Donc le système (3.37) admet une solution unique, donc définit de manière unique $\psi(s) \in L^2(\Omega)$.

L'application $h \rightarrow \psi(s)$ est linéaire continu de $L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$, donc:

$$(3.40) \quad \psi(s) = P(s) h, P(s) \in \mathcal{L}(H; H), H = L^2(\Omega).$$

On vérifie alors que l'on a l'identité (Cf. Lions, loc. cit.)

$$(3.41) \quad p(t) = P(t) y(t) + r(t).$$

On peut calculer P et r par un *calcul d'identification* (il faut vérifier que les calculs effectués ci-après de façon formelle sont loïsibles). On obtient, (en posant de manière générale $\frac{dg}{dt} = g'$),

$$(3.42) \quad -P'y - Py' - r' + A^*Py + A^*r - y = -z_d,$$

et en remplaçant dans (3.42) y' par sa valeur tirée de la première équation (3.36), on a finalement:

$$(3.43) \quad -P'y + P\left(Ay + \frac{p}{N} - f\right) - r' + A^*Py + A^*r - y = -z_d.$$

On peut encore remplacer dans (3.43) p par sa valeur (3.41), d'où:

$$-P'y + P A y + A^* P y + \frac{1}{N} P P y - y - r' + A^* r + \frac{1}{N} P r - P f = -z_d$$

et cela est une identité en y , d'où:

$$(3.44) \quad -\frac{\partial P}{\partial t} + P A + A^* P + \frac{1}{N} P \circ P = I$$

et

$$(3.45) \quad -\frac{\partial r}{\partial t} + A^* r + \frac{1}{N} P r = P f - z_d.$$

Comme $p(T) = 0$, on doit avoir:

$$(3.46) \quad P(T) = 0, r(T) = 0.$$

On vérifie enfin à partir de (3.37) que:

$$(3.47) \quad P(t)^* = P(t) \text{ dans } \mathcal{L}(H; H)$$

et que

$$(3.48) \quad P(t) \geq 0 \text{ dans } \mathcal{L}(H; H).$$

Plus précisément, on vérifie que:

$$(3.49) \quad (P(s)h, h) = \inf_v \mathcal{J}_s^h(v).$$

On note encore que:

$$(3.50) \quad P(t)h \in D(A^*), r(t) \in D(A^*).$$

D'après le théorème des noyaux de L. Schwartz [1], on peut représenter (de façon unique), l'opérateur $P(t)$ par un *noyau* $P(x, \xi, t)$ et on peut résumer les informations ci-dessus dans l'ensemble des conditions suivantes:

$$(3.51) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial P}{\partial t} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (a_i(x) P(x, \xi, t)) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \xi_i} (a_i(\xi) P(x, \xi, t)) \\ + \frac{1}{N} \int_{\Omega} P(x, \xi, t) P(\xi, \xi, t) d\xi = \delta(x - \xi) \text{ dans } \Omega \times \Omega \times]0, T[, \\ P(x, \xi, t) = P(\xi, x, t), \end{array} \right.$$

$$\left| \begin{array}{l} P(x, \xi, t) = 0 \text{ si } x \in \Gamma_+, \xi \in \Omega, t \in]0, T[, \\ P(x, \xi, T) = 0 \text{ sur } \Omega \times \Omega, \\ \forall h \in L^2(\Omega), \int_{\Omega} P(x, \xi, t) h(\xi) d\xi \in L^2(\Omega) \text{ et} \\ \iint_{\Omega \times \Omega} P(x, \xi, t) h(x) h(\xi) dx d\xi \geq 0. \end{array} \right.$$

Ce problème admet une solution unique. La fonction $r = r(x, t)$ est ensuite déterminée par :

$$\begin{aligned} (3.52) \quad & -\frac{\partial r}{\partial t} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (a_i(x) r(x, t)) + \frac{1}{N} \int_{\Omega} P(x, \xi, t) r(\xi) d\xi \\ & = \int_{\Omega} P(x, \xi, t) f(\xi, t) d\xi - z_d(x, t), \\ & r(x, t) = 0 \text{ si } x \in \Gamma_+, t \in]0, T[, \\ & r(x, T) = 0. \end{aligned}$$

On va maintenant démontrer le

THÉORÈME 3.2. La solution $P(x, \xi, t)$ de (3.51) vérifie :

$$(3.53) \quad P(x, \xi, t) \geq 0 \text{ p.p. sur } \Omega \times \Omega.$$

Démonstration

Considérons le système (3.37) avec h donnée ≥ 0 p.p. dans Ω .

On aura (3.53) si l'on montre que $\psi \geq 0$ p.p. dans $\Omega \times]s, T[$. Pour cela, on multiplie la 1^{re} équation (3.37) par ψ^- , il vient :

$$\int_{\Omega \times]s, T[} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + A\varphi \right) \psi^- dx dt - \frac{1}{N} \int_{\Omega \times]s, T[} (\psi^-)^2 dx dt = 0;$$

intégrant par parties et posant $\Lambda = -\frac{\partial}{\partial t} + A^*$, il vient :

$$- \int_{\Omega} h(x) \psi^-(x, s) dx + \int_{\Omega \times]s, T[} \varphi (\Lambda \psi^-) dx dt - \frac{1}{N} \int_{\Omega \times]s, T[} (\psi^-)^2 dx dt = 0$$

d'où, en tenant compte de la 2^e équation (3.37):

$$-\int_{\Omega} h(x) \psi^-(x, s) dx + \int_{\Omega \times]s, T[} (\wedge \psi) (\wedge \psi^-) dx dt - \frac{1}{N} \int_{\Omega \times]s, T[} (\psi^-)^2 dx dt = 0$$

d'où:

$$(3.54) \quad \int_{\Omega} h(x) \psi^-(x, s) dx + \int_{\Omega \times]s, T[} (\wedge \psi^-)^2 dx dt + \frac{1}{N} \int_{\Omega \times]s, T[} (\psi^-)^2 dx dt = 0.$$

Comme $h \geq 0$, tous les termes sont positifs, donc $\psi^- = 0$.

Remarque 3.6.

On rencontre d'autres systèmes du type (3.51) pour des opérateurs paraboliques (Cf. Lions [1] [2]). D'autres systèmes, encore du même type, ont été obtenus à propos de problèmes stochastiques par Bismut [1].

Des études *directes* de ces systèmes (et d'autres, n'entrant pas, apparemment, dans le cadre de la théorie du contrôle) ont été faites par Da Prato et Temam, les résultats les plus complets étant obtenus, à partir de méthodes itératives nouvelles, par L. Tartar [1].

Remarque 3.7.

Le noyau P dépend du paramètre $N : P = P_N$. On montre (Cf. Lions [3]) que $P_N(x, \xi, t)$ décroît (p.p.) lorsque N décroît et que lorsque $N \rightarrow 0$, $P_N(x, \xi, t) \rightarrow 0$, au sens:

$$\forall h \in L^2(\Omega), \forall t \in [0, T], \iint_{\Omega \times \Omega} P_N(x, \xi, t) h(x) h(\xi) dx d\xi \rightarrow 0.$$

4. EQUATIONS D'ÉTAT NON LINÉAIRES

4.1. Cas différentiable

Nous avons jusqu'ici considéré des cas où l'équation d'état du système était *linéaire*. On rencontre dans les applications de nombreuses situations (c'est même, en fait, la situation habituelle!) où l'équation d'état est *non linéaire*.