Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 19 (1973)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LE CONTRÔLE OPTIMAL DE SYSTÈMES DISTRIBUÉS

Autor: Lions, J. L.

Kapitel: 2.2. Un contre exemple

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-46289

2.2. *Un contre exemple*

On considère le cas *unidimensionnel*

$$\Omega =]\,0,1\,[\tag{2.6}$$

$\mathcal{U}_{ad}$ étant encore défini par (2.1), avec:

$$m = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}, \quad M = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}.$$

On suppose que l'état est maintenant donné par $y\,(v) = y$ solution de:

$$-\frac{d}{dx}\left(v\,(x)\frac{dy}{dx}\right) + vy = 0, \quad y\,(0) = 1, \quad y\,(1) = 2 \tag{2.7}$$

et la fonction coût par (2.5) avec $z_d = 1 + x^2$, i.e.

$$J\,(v) = \left(\int_0^1 |\,y\,(v) - (1+x^2)\,|^2\,dx\right)^{1/2}. \tag{2.8}$$

On va vérifier rapidement que:

$$\operatorname{Inf} J\,(v) = 0, \quad v \in \mathcal{U}_{ad} \tag{2.9}$$

et que:

$$\text{il n'existe pas } u \in \mathcal{U}_{ad} \text{ tel que } J\,(u) = 0. \tag{2.10}$$

Pour montrer (2.9), on remarque que l'on peut construire une suite v_n de $\mathcal{U}_{ad}$ telle que:

$$\left|\begin{array}{l} v_n \to v_0 = 1 \text{ dans } L^\infty\,(\Omega) \text{ faible étoile,} \\[2ex] \dfrac{1}{v_n} \to \dfrac{1}{w_0}, \; w_0 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{x^2}{6}, \text{ dans } L^\infty\,(\Omega) \text{ faible étoile.} \end{array}\right. \tag{2.11}$$

(Prendre $v_n\,(x) = 1 - \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{x^2}{6}\right)^{1/2}$ si $\dfrac{m}{n} < x \leqslant \dfrac{2m+1}{2n}$,

$1 + \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{x^2}{6}\right)^{1/2}$ si $\dfrac{2m+1}{2n} < x \leqslant \dfrac{m+1}{n}$,

$m = 0, 1, \ldots, n-1$).

Posons $y\,(v_n) = y_n$. On vérifie aussitôt que y_n est *borné* dans $H^1\,(\Omega)$ et donc que l'on peut extraire une sous-suite, encore notée y_n, telle que:

(2.12) $$y_n \to y_0 \text{ dans } H^1(\Omega) \textit{ faible.}$$

Mais l'injection de $H^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ étant compacte, il en résulte que:

(2.13) $$y_n \to y_0 \text{ dans } L^2(\Omega) \textit{ fort.}$$

Par ailleurs, on déduit de (2.7), avec $v = v_n$, que:

$$\frac{d}{dx}\left(v_n \frac{dy_n}{dx}\right) = v_n y_n \in \text{borné de } L^2(\Omega)$$

et par conséquent, on peut supposer, toujours par extraction éventuelle d'une sous-suite, que:

(2.14) $$v_n \frac{dy_n}{dx} \to \chi_0 \text{ dans } L^2(\Omega) \textit{ fort,}$$

et:

(2.15) $$-\frac{d}{dx}\chi_0 + v_0 y_0 = 0.$$

Mais on déduit de (2.14) et (2.11) que:

$$\frac{1}{v_n}\left(v_n \frac{dy_n}{dx}\right) \to \frac{1}{w_0}\chi_0 \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ faible}$$

et comme $\frac{1}{v_n}\left(v_n \frac{dy_n}{dx}\right) = \frac{dy_n}{dx} \to \frac{dy_0}{dx}$ dans $H^{-1}(\Omega)$ faible (espace dual de $H_0^1(\Omega)$), on a donc:

$$\frac{1}{w_0}\chi_0 = \frac{dy_0}{dx}$$

et (2.15) donne donc:

(2.16) $$-\frac{d}{dx}\left[w_0 \frac{dy_0}{dx}\right] + v_0 y_0 = 0$$

et (2.12) donne:

(2.17) $$y_0(0) = 1 \ , \ y_0(1) = 2.$$

On remplace v_0 et w_0 par leurs valeurs (2.11) et on vérifie alors que (2.16) (2.17) impliquent $y_0(x) = 1 + x^2$ de sorte que $J(v_n) \to 0$.

Vérifions maintenant (2.10); si un tel u existait, on aurait nécessairement $y(u) = 1 + x^2$, d'où en portant dans (2.7) (où l'on prend $v = u$): $-\frac{d}{dx}(2xu) + u(1+x^2) = 0$, d'où:

$$u = Cx^{-1/2} \exp. \left(\frac{x^2}{4}\right); \; \mathrm{C} = \text{constante}; \tag{2.18}$$

or, il n'existe aucune fonction de la forme (2.18) qui puisse être dans $\mathcal{U}_{ad}$.

Remarque 2.1.

Si l'on prend $J(v) = \left(\int_0^1 |y(v) - z_d(x)|^2 \, dx\right)^{1/2}$, on peut se demander *pour quelle classe de z_d le problème n'admet pas de solution.* Pour des résultats dans ce sens, Cf. F. Murat-L. Tartar [1], M. F. Bidaut [1].

Remarque 2.2.

On trouvera d'autres contre exemples (pour les dimensions supérieures et des systèmes paraboliques) dans Murat [1] [2].

Remarque 2.3.

Pour l'étude de problèmes *relaxés* attachés à des problèmes du type précédent, Cf. L. Cesari [1].

2.3. *Un résultat général d'existence*

Nous mentionnons maintenant un résultat de J. Baranger [1], que nous utiliserons aux n° suivants, et en particulier au n° 2.4. ci-après pour la résolution d'un problème « voisin » de celui du n° 2.1.

On considère, dans un espace de Banach X sur $\mathbf{R}$ *uniformément réflexif*, dont la norme est notée $\| \;\; \|$, une fonction:

$$\left| \begin{array}{l} \varphi \to M(\varphi) \text{ semi continu inférieurement (s.c.i.) de} \\[2ex] X \to \mathbf{R} \;,\; M(\varphi) \geqslant c > -\infty, \end{array} \right. \tag{2.19}$$

et un ensemble $S \subset X$ avec:

$$S \text{ est fermé dans } X. \tag{2.20}$$

(en particulier S *n'est pas nécessairement convexe*).