

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 19 (1973)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** SUR LE CONTRÔLE OPTIMAL DE SYSTÈMES DISTRIBUÉS  
**Autor:** Lions, J. L.  
**Kapitel:** 2. Problèmes d'existence  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-46289>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 25.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## 2. PROBLÈMES D'EXISTENCE

### 2.1. Un problème de contrôle dans les coefficients

Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$ , de frontière  $\Gamma$  régulière. L'ensemble des contrôles est défini par <sup>1)</sup>:

$$(2.1) \quad \mathcal{U}_{ad} = \{v \mid v \in L^\infty(\Omega), 0 < m \leq v(x) \leq M < \infty \text{ p.p. dans } \Omega\}$$

( $\mathcal{U}_{ad}$  = ensemble des contrôles admissibles).

Pour  $v \in \mathcal{U}_{ad}$ , l'état  $y(v)$  du système est défini par la solution du problème elliptique:

$$(2.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{ij}(x) v(x) \frac{\partial y}{\partial x_j} \right) = f \text{ dans } \Omega, \\ y = 0 \text{ sur } \Gamma, \end{array} \right.$$

où  $f$  est donné par exemple dans  $L^2(\Omega)$  et où les  $a_{ij}$  sont donnés avec:

$$(2.3) \quad a_{ij} \in L^\infty(\Omega), \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \alpha \sum_{i=1}^n \xi_i^2, \alpha > 0.$$

Le problème (2.2) admet une solution unique:

$$(2.4) \quad y(v) \in H_0^1(\Omega)^2).$$

La fonction coût est par exemple:

$$(2.5) \quad J(v) = \left( \int_{\Omega} |y(v) - z_d|^2 dx \right)^{1/2},$$

où  $z_d$  (état désiré) est donné dans  $L^2(\Omega)$ . Le problème est alors de minimiser  $J(v)$  lorsque  $v$  parcourt  $\mathcal{U}_{ad}$ .

Pour des exemples physiques où ce problème intervient, Cf. K. A. Lure [1]; on ignore s'il existe  $u \in \mathcal{U}_{ad}$  tel que  $J(u) = \inf. J(v), v \in \mathcal{U}_{ad}$ . On va voir, suivant Murat [1] que la réponse est négative pour un problème très voisin du précédent.

<sup>1)</sup> Toutes les fonctions utilisées sont à valeurs réelles.

<sup>2)</sup>  $H^1(\Omega)$  désigne l'espace de Sobolev (Cf. Sobolev [1]) des fonctions  $\varphi \in L^2(\Omega)$  telles que  $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), i = 1, \dots, n$  et  $H_0^1(\Omega)$  le sous espace des  $\varphi \in H^1(\Omega)$  tels que  $\varphi = 0$  sur  $\Gamma$ .

## 2.2. Un contre exemple

On considère le cas *unidimensionnel*

$$(2.6) \quad \Omega = ]0,1[$$

$\mathcal{U}_{ad}$  étant encore défini par (2.1), avec:

$$m = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}}, \quad M = \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2}}.$$

On suppose que l'état est maintenant donné par  $y(v) = y$  solution de:

$$(2.7) \quad -\frac{d}{dx}\left(v(x)\frac{dy}{dx}\right) + vy = 0, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 2$$

et la fonction coût par (2.5) avec  $z_d = 1 + x^2$ , i.e.

$$(2.8) \quad J(v) = \left(\int_0^1 |y(v) - (1+x^2)|^2 dx\right)^{1/2}.$$

On va vérifier rapidement que:

$$(2.9) \quad \inf J(v) = 0, \quad v \in \mathcal{U}_{ad}$$

et que:

$$(2.10) \quad \text{il n'existe pas } u \in \mathcal{U}_{ad} \text{ tel que } J(u) = 0.$$

Pour montrer (2.9), on remarque que l'on peut construire une suite  $v_n$  de  $\mathcal{U}_{ad}$  telle que:

$$(2.11) \quad \left\{ \begin{array}{l} v_n \rightarrow v_0 = 1 \text{ dans } L^\infty(\Omega) \text{ faible étoile,} \\ \frac{1}{v_n} \rightarrow \frac{1}{w_0}, \quad w_0 = \frac{1}{2} + \frac{x^2}{6}, \text{ dans } L^\infty(\Omega) \text{ faible étoile.} \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} \text{(Prendre } v_n(x) = 1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{x^2}{6}\right)^{1/2} \text{ si } \frac{m}{n} < x \leq \frac{2m+1}{2n}, \\ 1 + \left(\frac{1}{2} - \frac{x^2}{6}\right)^{1/2} \text{ si } \frac{2m+1}{2n} < x \leq \frac{m+1}{n}, \\ m = 0, 1, \dots, n-1). \end{aligned}$$

Posons  $y(v_n) = y_n$ . On vérifie aussitôt que  $y_n$  est *borné* dans  $H^1(\Omega)$  et donc que l'on peut extraire une sous-suite, encore notée  $y_n$ , telle que:

$$(2.12) \quad y_n \rightarrow y_0 \text{ dans } H^1(\Omega) \text{ faible.}$$

Mais l'injection de  $H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$  étant compacte, il en résulte que:

$$(2.13) \quad y_n \rightarrow y_0 \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ fort.}$$

Par ailleurs, on déduit de (2.7), avec  $v = v_n$ , que:

$$\frac{d}{dx} \left( v_n \frac{dy_n}{dx} \right) = v_n y_n \in \text{borné de } L^2(\Omega)$$

et par conséquent, on peut supposer, toujours par extraction éventuelle d'une sous-suite, que:

$$(2.14) \quad v_n \frac{dy_n}{dx} \rightarrow \chi_0 \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ fort,}$$

et:

$$(2.15) \quad - \frac{d}{dx} \chi_0 + v_0 y_0 = 0.$$

Mais on déduit de (2.14) et (2.11) que:

$$\frac{1}{v_n} \left( v_n \frac{dy_n}{dx} \right) \rightarrow \frac{1}{w_0} \chi_0 \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ faible}$$

et comme  $\frac{1}{v_n} \left( v_n \frac{dy_n}{dx} \right) = \frac{dy_n}{dx} \rightarrow \frac{dy_0}{dx}$  dans  $H^{-1}(\Omega)$  faible (espace dual de  $H_0^1(\Omega)$ ), on a donc:

$$\frac{1}{w_0} \chi_0 = \frac{dy_0}{dx}$$

et (2.15) donne donc:

$$(2.16) \quad - \frac{d}{dx} \left[ w_0 \frac{dy_0}{dx} \right] + v_0 y_0 = 0$$

et (2.12) donne:

$$(2.17) \quad y_0(0) = 1, \quad y_0(1) = 2.$$

On remplace  $v_0$  et  $w_0$  par leurs valeurs (2.11) et on vérifie alors que (2.16) (2.17) impliquent  $y_0(x) = 1 + x^2$  de sorte que  $J(v_n) \rightarrow 0$ .

Vérifions maintenant (2.10); si un tel  $u$  existait, on aurait nécessairement  $y(u) = 1 + x^2$ , d'où en portant dans (2.7) (où l'on prend  $v = u$ ):  

$$-\frac{d}{dx}(2xu) + u(1+x^2) = 0, \text{ d'où:}$$

$$(2.18) \quad u = Cx^{-1/2} \exp. \left( \frac{x^2}{4} \right); C = \text{constante};$$

or, il n'existe aucune fonction de la forme (2.18) qui puisse être dans  $\mathcal{U}_{ad}$ .

*Remarque 2.1.*

Si l'on prend  $J(v) = \left( \int_0^1 |y(v) - z_d(x)|^2 dx \right)^{1/2}$ , on peut se demander pour quelle classe de  $z_d$  le problème n'admet pas de solution. Pour des résultats dans ce sens, Cf. F. Murat-L. Tartar [1], M. F. Bidaut [1].

*Remarque 2.2.*

On trouvera d'autres contre exemples (pour les dimensions supérieures et des systèmes paraboliques) dans Murat [1] [2].

*Remarque 2.3.*

Pour l'étude de problèmes *relaxés* attachés à des problèmes du type précédent, Cf. L. Cesari [1].

### 2.3. Un résultat général d'existence

Nous mentionnons maintenant un résultat de J. Baranger [1], que nous utiliserons aux n° suivants, et en particulier au n° 2.4. ci-après pour la résolution d'un problème « voisin » de celui du n° 2.1.

On considère, dans un espace de Banach  $X$  sur  $\mathbf{R}$  uniformément réflexif, dont la norme est notée  $\| \cdot \|$ , une fonction:

$$(2.19) \quad \left| \begin{array}{l} \varphi \rightarrow M(\varphi) \text{ semi continu inférieurement (s.c.i.) de} \\ X \rightarrow \mathbf{R}, M(\varphi) \geqslant c > -\infty, \end{array} \right.$$

et un ensemble  $S \subset X$  avec:

$$(2.20) \quad S \text{ est fermé dans } X.$$

(en particulier  $S$  n'est pas nécessairement convexe).

On considère alors, pour  $\xi \in X$ , le problème

$$(2.21) \quad \inf_{\varphi \in S} [J(\varphi) + \|\xi - \varphi\|].$$

On a (Baranger, loc. cit.) le

**THÉORÈME 2.1.** *On peut choisir  $\xi$  dans un ensemble  $\mathcal{X} \subset X$ , dense dans  $X$ , <sup>1)</sup> de sorte qu'alors le problème (2.21) admette une solution (i.e. il existe alors  $\varphi_0 \in S$ ) tel que*

$$J(\varphi_0) + \|\xi - \varphi_0\| = \inf_{\varphi \in S} [J(\varphi) + \|\xi - \varphi\|].$$

Si  $J = 0$ , c'est un théorème dû à Edelstein [1].

#### 2.4. Application au problème de contrôle dans les coefficients

Pour  $\xi \in L^2(\Omega)$ , on introduit (l'état  $y(v)$  étant donné par (2.2)) :

$$(2.22) \quad J_\varepsilon(v) = \left( \int_\Omega |y(v) - z_d|^2 dx \right)^{1/2} + \varepsilon \|v - \xi\|_{L^2(\Omega)}$$

$$\varepsilon > 0.$$

On est alors dans les conditions d'application du Théorème 2.1, si l'on prend :

$$X = L^2(\Omega), \quad S = \mathcal{U}_{ad},$$

$$J(v) = \frac{1}{\varepsilon} \left( \int_\Omega |y(v) - z_d|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Donc: *On peut choisir  $\xi$  dans un ensemble dense de  $L^2(\Omega)$  de manière qu'alors il existe  $u \in \mathcal{U}_{ad}$  tel que*

$$J_\varepsilon(u) = \inf_{v \in \mathcal{U}_{ad}} J_\varepsilon(v).$$

#### Remarque 2.4

Les problèmes du type « contrôle dans les coefficients » se rattachent également aux résultats de Spagnolo [1] [2] et Marino-Spagnolo [1].

<sup>1)</sup> M<sup>lle</sup> F. Bidaut [1] a montré qu'il existe  $\mathcal{X}$  ensemble  $G_\delta$  dense avec la propriété.