Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 19 (1973)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LE CONTRÔLE OPTIMAL DE SYSTÈMES DISTRIBUÉS

Autor: Lions, J. L.

Kapitel: 2. Problèmes d'existence

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-46289

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 09.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

2. PROBLÈMES D'EXISTENCE

2.1. Un problème de contrôle dans les coefficients

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n , de frontière Γ régulière. L'ensemble des contrôles est défini par 1):

$$(2.1) \mathcal{U}_{ad} = \{ v \mid v \in L^{\infty}(\Omega), \ 0 < m \leqslant v \ (x) \leqslant M < \infty \ \text{ p.p. dans } \Omega \}$$

 $(\mathcal{U}_{ad} = \text{ensemble des contrôles } ad \text{missibles}).$

Pour $v \in \mathcal{U}_{ad}$, l'état y (v) du système est défini par la solution du problème elliptique:

(2.2)
$$-\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_{i}} \left(a_{ij}(x) v(x) \frac{\partial y}{\partial x_{j}} \right) = f \text{ dans } \Omega,$$

$$y = 0 \text{ sur } \Gamma,$$

où f est donné par exemple dans $L^{2}(\Omega)$ et où les a_{ij} sont donnés avec:

(2.3)
$$a_{ij} \in L^{\infty}(\Omega), \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \, \xi_i \, \xi_j \geqslant \alpha \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2, \, \alpha > 0.$$

Le problème (2.2) admet une solution unique:

(2.4)
$$y(v) \in H_0^1(\Omega)^2$$
.

La fonction coût est par exemple:

(2.5)
$$J(v) = \left(\int_{\Omega} |y(v) - z_d|^2 dx \right)^{1/2},$$

où z_d (état désiré) est donné dans $L^2(\Omega)$. Le problème est alors de minimiser J(v) lorsque v parcourt \mathcal{U}_{ad} .

Pour des exemples physiques où ce problème intervient, Cf. K. A. Lure [1]; on ignore s'il existe $u \in \mathcal{U}_{ad}$ tel que $J(u) = \inf$. J(v), $v \in \mathcal{U}_{ad}$. On va voir, suivant Murat [1] que la réponse est négative pour un problème très voisin du précédent.

¹⁾ Toutes les fonctions utilisées sont à valeurs réelles.

²⁾ $H^1(\Omega)$ désigne l'espace de Sobolev (Cf. Sobolev [1]) des fonctions $\varphi \in L^2(\Omega)$ telles que $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)$, i=1,...,n et $H^1_0(\Omega)$ le sous espace des $\varphi \in H^1(\Omega)$ tels que $\varphi = 0$ sur Γ .

2.2. Un contre exemple

On considère le cas unidimensionnel

$$(2.6) \Omega =]0,1[$$

 \mathcal{U}_{ad} étant encore défini par (2.1), avec:

$$m = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}, M = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}.$$

On suppose que l'état est maintenant donné par y(v) = y solution de:

(2.7)
$$-\frac{d}{dx}\left(v(x)\frac{dy}{dx}\right) + vy = 0, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 2$$

et la fonction coût par (2.5) avec $z_d = 1 + x^2$, i.e.

(2.8)
$$J(v) = \left(\int_0^1 |y(v) - (1+x^2)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

On va vérifier rapidement que:

(2.9)
$$\operatorname{Inf} J(v) = 0, \quad v \in \mathcal{U}_{ad}$$

et que:

(2.10) il n'existe pas
$$u \in \mathcal{U}_{ad}$$
 tel que $J(u) = 0$.

Pour montrer (2.9), on remarque que l'on peut construire une suite v_n de \mathcal{U}_{ad} telle que:

(2.11)
$$v_n \to v_0 = 1 \text{ dans } L^{\infty}(\Omega) \text{ faible étoile,}$$

$$\frac{1}{v_n} \to \frac{1}{w_0}, w_0 = \frac{1}{2} + \frac{x^2}{6}, \text{ dans } L^{\infty}(\Omega) \text{ faible étoile.}$$

(Prendre
$$v_n(x) = 1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{x^2}{6}\right)^{1/2}$$
 si $\frac{m}{n} < x \le \frac{2m+1}{2n}$,
$$1 + \left(\frac{1}{2} - \frac{x^2}{6}\right)^{1/2}$$
 si $\frac{2m+1}{2n} < x \le \frac{m+1}{n}$,
$$m = 0, 1, ..., n-1$$
.

Posons $y(v_n) = y_n$. On vérifie aussitôt que y_n est borné dans $H^1(\Omega)$ et donc que l'on peut extraire une sous-suite, encore notée y_n , telle que:

(2.12)
$$y_n \to y_0 \text{ dans } H^1(\Omega) \text{ faible.}$$

Mais l'injection de $H^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ étant compacte, il en résulte que:

(2.13)
$$y_n \to y_0 \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ fort.}$$

Par ailleurs, on déduit de (2.7), avec $v = v_n$, que:

$$\frac{d}{dx}\left(v_n \frac{dy_n}{dx}\right) = v_n y_n \in \text{born\'e de } L^2\left(\Omega\right)$$

et par conséquent, on peut supposer, toujours par extraction éventuelle d'une sous-suite, que:

(2.14)
$$v_n \frac{dy_n}{dx} \to \chi_0 \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ fort,}$$

et:

$$(2.15) -\frac{d}{dx}\chi_0 + v_0 y_0 = 0.$$

Mais on déduit de (2.14) et (2.11) que:

$$\frac{1}{v_n} \left(v_n \frac{dy_n}{dx} \right) \to \frac{1}{w_0} \chi_0 \text{ dans } L^2 (\Omega) \text{ faible}$$

et comme $\frac{1}{v_n}\left(v_n\frac{dy_n}{dx}\right) = \frac{dy_n}{dx} \to \frac{dy_0}{dx}$ dans $H^{-1}\left(\Omega\right)$ faible (espace dual de $H_0^1\left(\Omega\right)$), on a donc:

$$\frac{1}{w_0} \chi_0 = \frac{dy_0}{dx}$$

et (2.15) donne donc:

$$(2.16) -\frac{d}{dx} \left[w_0 \frac{dy_0}{dx} \right] + v_0 y_0 = 0$$

et (2.12) donne:

$$(2.17) y_0(0) = 1, y_0(1) = 2.$$

On remplace v_0 et w_0 par leurs valeurs (2.11) et on vérifie alors que (2.16) (2.17) impliquent $y_0(x) = 1 + x^2$ de sorte que $J(v_n) \to 0$.

Vérifions maintenant (2.10); si un tel u existait, on aurait nécessairement $y(u) = 1 + x^2$, d'où en portant dans (2.7) (où l'on prend v = u): $-\frac{d}{dx}(2xu) + u(1+x^2) = 0$, d'où:

(2.18)
$$u = Cx^{-1/2} \exp\left(\frac{x^2}{4}\right); C = \text{constante};$$

or, il n'existe aucune fonction de la forme (2.18) qui puisse être dans \mathcal{U}_{ad} .

Remarque 2.1.

Si l'on prend $J(v) = (\int_0^1 |y(v) - z_d(x)|^2 dx)^{1/2}$, on peut se demander pour quelle classe de z_d le problème n'admet pas de solution. Pour des résultats dans ce sens, Cf. F. Murat-L. Tartar [1], M. F. Bidaut [1].

Remarque 2.2.

On trouvera d'autres contre exemples (pour les dimensions supérieures et des systèmes paraboliques) dans Murat [1] [2].

Remarque 2.3.

Pour l'étude de problèmes relaxés attachés à des problèmes du type précédent, Cf. L. Cesari [1].

2.3. Un résultat général d'existence

Nous mentionnons maintenant un résultat de J. Baranger [1], que nous utiliserons aux n° suivants, et en particulier au n° 2.4. ci-après pour la résolution d'un problème « voisin » de celui du n° 2.1.

On considère, dans un espace de Banach X sur \mathbf{R} uniformément réflexif, dont la norme est notée $\|\cdot\|$, une fonction:

(2.19)
$$\varphi \to M(\varphi) \text{ semi continu inférieurement (s.c.i.) de}$$

$$X \to \mathbf{R} , M(\varphi) \geqslant c > -\infty,$$

et un ensemble $S \subset X$ avec:

$$(2.20)$$
 S est fermé dans X .

(en particulier S n'est pas nécessairement convexe).

On considère alors, pour $\xi \in X$, le problème

(2.21)
$$\inf_{\varphi \in s} [J(\varphi) + || \xi - \varphi ||].$$

On a (Baranger, loc. cit.) le

Théorème 2.1. On peut choisir ξ dans un ensemble $\mathcal{X} \subset X$, dense dans X, 1) de sorte qu'alors le problème (2.21) admette une solution (i.e. il existe alors $\varphi_0 \in S$) tel que

$$J(\varphi_0) + ||\xi - \varphi_0|| = \inf_{\varphi \in s} [J(\varphi) + ||\xi - \varphi||].$$

Si J = 0, c'est un théorème dû à Edelstein [1].

2.4. Application au problème de contrôle dans les coefficients

Pour $\xi \in L^2(\Omega)$, on introduit (l'état y(v) étant donné par (2.2)):

(2.22)
$$J_{\varepsilon}(v) = \left(\int_{\Omega} |y(v) - z_d|^2 dx \right)^{1/2} + \varepsilon ||v - \xi||_{L^2(\Omega)}$$

$$\varepsilon > 0.$$

On est alors dans les conditions d'application du Théorème 2.1, si l'on prend:

$$X = L^{2}(\Omega)$$
, $S = \mathcal{U}_{ad}$,

$$J(v) = \frac{1}{\varepsilon} \left(\int_{\Omega} |y(v) - z_{d}|^{2} dx \right)^{1/2}.$$

Donc: On peut choisir ξ dans un ensemble dense de $L^2(\Omega)$ de manière qu'alors il existe $u \in \mathcal{U}_{ad}$ tel que

$$J_{\varepsilon}(u) = \inf J_{\varepsilon}(v), v \in \mathcal{U}_{ad}$$

Remarque 2.4

Les problèmes du type « contrôle dans les cœfficients » se rattachent également aux résultats de Spagnolo [1] [2] et Marino-Spagnolo [1].

¹⁾ M^{11e} F. Bidaut [1] a montré qu'il existe x ensemble G_{δ} dense avec la propriété.