

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 19 (1973)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LE CONTRÔLE OPTIMAL DE SYSTÈMES DISTRIBUÉS
Autor: Lions, J. L.
Kapitel: 1. Introduction
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-46289>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 25.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

SUR LE CONTRÔLE OPTIMAL DE SYSTÈMES DISTRIBUÉS

par J. L. LIONS

1. INTRODUCTION ¹⁾

1.1. Le contrôle des systèmes distribués (c'est-à-dire des systèmes dont l'état est donné par la résolution d'une équation aux dérivées partielles) intervient dans un grand nombre d'applications. Sans vouloir, en aucune manière, tenter une liste exhaustive d'applications, signalons :

- (1) Le contrôle de diverses réactions enzymatiques en biochimie (Cf. J. P. Kernevez [1], J. P. Kernevez et Thomas [1]) où l'état est, en général, donné par un ensemble d'équations paraboliques non linéaires ;
- (2) beaucoup de problèmes dans la théorie de la diffusion de la chaleur (Cf. Butkovski [1], P. K. C. Wang [1], Yvon [1]);
- (3) un grand nombre de problèmes en chimie, pour lesquels nous renvoyons aux comptes rendus du congrès de l'IFAC, Banff, Canada, 1971 ;
- (4) des problèmes liés à la théorie des marées ; Cf. G. F. Duff [1] ;
- (5) des problèmes de pollution (Cf. Hullet [1]).

Dans ces problèmes, le contrôle s'effectue généralement par des *contrôles frontières* ou des *contrôles « ponctuels »* à l'intérieur du domaine.

Mais dans toute une série de problèmes de *conception optimale* (optimum design) intervenant en particulier en Mécanique, le contrôle est *le domaine lui-même* (contrôle « géométrique »).

Enfin, tous les problèmes évoqués précédemment se posent dans un cadre *déterministe* ou *stochastique* (Cf. Bensoussan [1] [2], J. P. Kernevez [2], Balakrishnan et J. L. Lions [1]).

¹⁾ L'exposé qui suit correspond à quatre conférences faites, à l'invitation du professeur PONTRYAGIN et de l'Académie des sciences d'URSS, dans le cadre des conférences de l'Union Mathématique internationale, au séminaire des professeurs NIKOLSKI et PONTRYAGIN à l'Institut Stekloff, Moscou, Novembre 1972. Un exposé sur les aspects numériques des problèmes étudiés a été fait, dans le même cadre, au séminaire du professeur TYCHONOFF; les détails ne sont pas donnés ici.

1.2. Une fois connu l'état $y(v)$ du système (v désigne le contrôle qui peut être assujetti à un certain nombre de contraintes), on veut *minimiser* une « fonction coût » ¹⁾:

$$(*) \quad J(v) = \Phi(g(v)) + \psi(v)$$

où Φ correspond à l'objectif à atteindre et ψ correspond au coût du contrôle lui-même.

1.3. Les problèmes à résoudre sont alors:

- (i) l'étude de l'existence de une ou plusieurs solutions du problème;
- (ii) l'obtention de conditions nécessaires, ou nécessaires et suffisantes pour l'optimalité, et, en particulier, l'extension du principe du maximum de Pontryagin (Cf. Pontryagin, Boltyanskii, Gamkrelidze et Mishenko [1]); cf. pour cela Yu. Egorov [1] [2];
- (iii) l'étude du contrôle optimal, en particulier à partir du système de l'optimalité, qui est maintenant un ensemble d'équations aux dérivées partielles avec, dans le cas d'évolution, les conditions initiales, finales et des conditions aux limites sur la frontière du domaine (Cf. Lions [1] [2]);
- (iv) l'étude des problèmes stochastiques correspondants (Cf. en particulier Bensoussan [1]), ce qui conduit, entre autres questions, à la nécessité de l'extension aux équations aux dérivées partielles de la théorie de Ito (Cf. Bensoussan [2], Bensoussan-Temam [1], Pardoux [1]);
- (v) le problème de la synthèse (feedback) qui, dans le cas linéaire quadratique conduit à une équation aux dérivées partielles non linéaire avec une non linéarité quadratique correspondant à la composition de noyaux (Cf. Lions [1], [2] et un exemple au n° 3 ci-après);
il faut naturellement y ajouter le problème fondamental des *algorithmes numériques*, qui ne sont pas abordés ici.

1.4. Nous étudions dans la suite *certaines aspects* ²⁾ des problèmes évoqués ci-dessus.

Le n° 2 étudie certains problèmes d'*existence* qui conduisent à des problèmes ouverts qui semblent intéressants, dans la théorie des équations

¹⁾ Dont le *choix* peut lui-même être un problème.

²⁾ Nous renvoyons à Lions [1] [2], Bensoussan [1], pour une étude systématique de certains points non étudiés ici (ou très brièvement évoqués); on trouvera aussi dans ces travaux une large bibliographie complémentaire.

aux dérivées partielles; on donne un contre exemple dû à Murat [1] et des résultats de Baranger [1]; pour d'autres aspects des problèmes d'existence, on pourra se reporter à D. Berkowitz [1], M. F. Bidaut [1], L. Cesari [1], I. Ekeland [1], I. Ekeland et R. Temam [1], Gamkrelidze [1] et à la bibliographie de ces travaux.

Le n° 3 rappelle d'abord certains résultats pour une équation d'état hyperbolique linéaire et une fonction coût quadratique et pour lesquels on peut établir certaines propriétés de comparaison qui peuvent être utiles (des résultats complémentaires dans ce sens sont donnés dans Lions [3]).

Le n° 4 donne très brièvement quelques exemples de problèmes où l'équation d'état est non linéaire (ce sont, dans les applications les exemples les plus fréquents). Lorsque la solution (c'est-à-dire l'état) dépend différentiablement du contrôle, on peut facilement donner des conditions nécessaires (il semble que l'étude systématique de la suffisance éventuelle de ces conditions reste à faire). Le cas — qui est assez fréquent — où la dépendance est *non* différentiable semble largement ouvert; nous en donnons un exemple; c'est le cas en particulier de tous les systèmes gouvernés par des *inéquations variationnelles* (Cf. Duvaut-Lions [1] pour des exemples en Physique et en Mécanique).

Le n° 5 étudie des problèmes asymptotiques qui sont directement liés à la théorie des perturbations singulières. Il y a essentiellement deux situations: (i) l'équation d'état peut contenir un « petit » paramètre et on utilise la théorie des couches limites au niveau de l'équation d'état; nous renvoyons à Lions [5], Chapitre 7; (ii) un petit paramètre peut apparaître dans la fonction ψ (Cf. Formule (*)), ce qui correspond à un contrôle « bon marché » — une situation qui est assez fréquente —. On étudie cet aspect au n° 5, ce qui conduit à (pensons-nous) d'intéressantes questions de perturbations singulières pour des opérateurs pseudo-différentiels et à de nouveaux problèmes relatifs à des équations non linéaires non homogènes (on utilise un résultat non encore publié de H. Brezis [2] et la théorie de l'interpolation non linéaire, Lions [6], J. Peetre [1]).

Le n° 6 présente brièvement certains résultats de Bensoussan, Goursat et l'auteur (Cf. A. Bensoussan et J. L. Lions [1] [2] et A. Bensoussan, M. Goursat et J. L. Lions [1] pour une étude plus complète) relatifs à certains problèmes de contrôle stochastique (gestion optimale, temps d'arrêts) et qui conduisent à l'étude de nouveaux types d'inéquations ou d'inéquations quasi variationnelles d'évolution.

Le plan détaillé est le suivant:

2. PROBLÈMES D'EXISTENCE
 - 2.1. Un problème de contrôle dans les coefficients
 - 2.2. Un contre exemple
 - 2.3. Un résultat général d'existence
 - 2.4. Application au problème de contrôle dans les coefficients
3. CAS LINÉAIRE QUADRATIQUE — REMARQUES SUR LE SYSTÈME D'OPTIMALITÉ
 - 3.1. Un système hyperbolique
 - 3.2. Système d'optimalité
 - 3.3. Propriétés de comparaison
 - 3.4. Cas sans contrainte — Equation intégro-différentielle de Riccati
4. EQUATIONS D'ÉTAT NON LINÉAIRES
 - 4.1. Cas différentiable
 - 4.2. Cas non différentiable
5. PHÉNOMÈNES DE PERTURBATIONS SINGULIÈRES
 - 5.1. Orientation
 - 5.2. Cas d'un système linéaire
 - 5.3. Cas d'un système non linéaire
 - 5.4. Remarques sur certains problèmes elliptiques non linéaires non homogènes
6. PROBLÈMES DE GESTION OPTIMALE ET INÉQUATIONS VARIATIONNELLES
 - 6.1. Un problème de gestion optimale
 - 6.2. Réduction à une inéquation quasi variationnelle d'évolution
 - 6.3. Problèmes de temps d'arrêt optimal

BIBLIOGRAPHIE