Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 19 (1973)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LE CONTRÔLE OPTIMAL DE SYSTÈMES DISTRIBUÉS

Autor: Lions, J. L.

Kapitel: 1. Introduction

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-46289

SUR LE CONTRÔLE OPTIMAL DE SYSTÈMES DISTRIBUÉS

par J. L. LIONS

1. INTRODUCTION [1]

1.1. Le contrôle des systèmes distribués (c'est-à-dire des systèmes dont l'état est donné par la résolution d'une équation aux dérivées partielles) intervient dans un grand nombre d'applications. Sans vouloir, en aucune manière, tenter une liste exhaustive d'applications, signalons:

(1) Le contrôle de diverses réactions enzymatiques en biochimie (Cf. J. P. Kernevez [1], J. P. Kernevez et Thomas [1]) où l'état est, en général, donné par un ensemble d'équations paraboliques non linéaires;

(2) beaucoup de problèmes dans la théorie de la diffusion de la chaleur (Cf. Butkovski [1], P. K. C. Wang [1], Yvon [1]);

(3) un grand nombre de problèmes en chimie, pour lesquels nous renvoyons aux comptes rendus du congrès de l'IFAC, Banff, Canada, 1971;

(4) des problèmes liés à la théorie des marées; Cf. G. F. Duff [1];

(5) des problèmes de pollution (Cf. Hullet [1]).

Dans ces problèmes, le contrôle s'effectue généralement par des *contrôles frontières* ou des *contrôles* « *ponctuels* » à l'intérieur du domaine.

Mais dans toute une série de problèmes de *conception optimale* (optimum design) intervenant en particulier en Mécanique, le contrôle est *le domaine lui-même* (contrôle « géométrique »).

Enfin, tous les problèmes évoqués précédemment se posent dans un cadre *déterministe* ou *stochastique* (Cf. Bensoussan [1] [2], J. P. Kernevez [2], Balakrishnan et J. L. Lions [1]).

---

[1]) L'exposé qui suit correspond à quatre conférences faites, à l'invitation du professeur PONTRYAGIN et de l'Académie des sciences d'URSS, dans le cadre des conférences de l'Union Mathématique internationale, au séminaire des professeurs NIKOLSKI et PONTRYAGIN à l'Institut Stekloff, Moscou, Novembre 1972. Un exposé sur les aspects numériques des problèmes étudiés a été fait, dans le même cadre, au séminaire du professeur TYCHONOFF; les détails ne sont pas donnés ici.

1.2. Une fois connu l'état $y(v)$ du système (v désigne le contrôle qui peut être assujetti à un certain nombre de contraintes), on veut *minimiser* une « fonction coût » [1]):

$$(*)\qquad J(v) = \Phi(g(v)) + \psi(v)$$

où Φ correspond à l'objectif à atteindre et ψ correspond au coût du contrôle lui-même.

1.3. Les problèmes à résoudre sont alors:

(i) l'étude de l'existence de une ou plusieurs solutions du problème;

(ii) l'obtention de conditions nécessaires, ou nécessaires et suffisantes pour l'optimalité, et, en particulier, l'extension du principe du maximum de Pontryagin (Cf. Pontryagin, Boltyanskii, Gamkrelidze et Mishenko [1]); cf. pour cela Yu. Egorov [1] [2];

(iii) l'étude du contrôle optimal, en particulier à partir du système de l'optimalité, qui est maintenant un ensemble d'équations aux dérivées partielles avec, dans le cas d'évolution, les conditions initiales, finales et des conditions aux limites sur la frontière du domaine (Cf. Lions [1] [2]);

(iv) l'étude des problèmes stochastiques correspondants (Cf. en particulier Bensoussan [1]), ce qui conduit, entre autres questions, à la nécessité de l'extension aux équations aux dérivées parielles de la théorie de Ito (Cf. Bensoussan [2], Bensoussan-Temam [1], Pardoux [1]);

(v) le problème de la synthèse (feedback) qui, dans le cas linéaire quadratique conduit à une équation aux dérivées partielles non linéaire avec une non linéarité quadratique correspondant à la composition de noyaux (Cf. Lions [1], [2] et un exemple au n° 3 ci-après);

il faut naturellement y ajouter le problème fondamental des *algorithmes numériques*, qui ne sont pas abordés ici.

1.4. Nous étudions dans la suite *certains aspects* [2]) des problèmes évoqués ci-dessus.

Le n° 2 étudie certains problèmes d'*existence* qui conduisent à des problèmes ouverts qui semblent intéressants, dans la théorie des équations

---

[1]) Dont le *choix* peut lui-même être un problème.

[2]) Nous renvoyons à Lions [1] [2], Bensoussan [1], pour une étude systématique de certains points non étudiés ici (ou très brièvement évoqués); on trouvera aussi dans ces travaux une large bibliographie complémentaire.

aux dérivées partielles; on donne un contre exemple dû à Murat [1] et des résultats de Baranger [1]; pour d'autres aspects des problèmes d'existence, on pourra se reporter à D. Berkowitz [1], M. F. Bidaut [1], L. Cesari [1], I. Ekeland [1], I. Ekeland et R. Temam [1], Gamkrelidze [1] et à la bibliographie de ces travaux.

Le n° 3 rappelle d'abord certains résultats pour une équation d'état hyperbolique linéaire et une fonction coût quadratique et pour lesquels on peut établir certaines propriétés de comparaison qui peuvent être utiles (des résultats complémentaires dans ce sens sont donnés dans Lions [3]).

Le n° 4 donne très brièvement quelques exemples de problèmes où l'équation d'état est non linéaire (ce sont, dans les applications les exemples les plus fréquents). Lorsque la solution (c'est-à-dire l'état) dépend différentiablement du contrôle, on peut facilement donner des conditions nécessaires (il semble que l'étude systématique de la suffisance éventuelle de ces conditions reste à faire). Le cas – qui est assez fréquent – où la dépendance est *non* différentiable semble largement ouvert; nous en donnons un exemple; c'est le cas en particulier de tous les systèmes gouvernés par des *inéquations variationnelles* (Cf. Duvaut-Lions [1] pour des exemples en Physique et en Mécanique).

Le n° 5 étudie des problèmes asymptotiques qui sont directement liés à la théorie des perturbations singulières. Il y a essentiellement deux situations: (i) l'équation d'état peut contenir un « petit » paramètre et on utilise la théorie des couches limites au niveau de l'équation d'état; nous renvoyons à Lions [5], Chapitre 7; (ii) un petit paramètre peut apparaître dans la fonction ψ (Cf. Formule (*)), ce qui correspond à un contrôle « bon marché » – une situation qui est assez fréquente –. On étudie cet aspect au n° 5, ce qui conduit à (pensons-nous) d'intéressantes questions de perturbations singulières pour des opérateurs pseudo-différentiels et à de nouveaux problèmes relatifs à des équations non linéaires non homogènes (on utilise un résultat non encore publié de H. Brezis [2] et la théorie de l'interpolation non linéaire, Lions [6], J. Peetre [1]).

Le n° 6 présente brièvement certains résultats de Bensoussan, Goursat et l'auteur (Cf. A. Bensoussan et J. L. Lions [1] [2] et A. Bensoussan, M. Goursat et J. L. Lions [1] pour une étude plus complète) relatifs à certains problèmes de contrôle stochastique (gestion optimale, temps d'arrêts) et qui conduisent à l'étude de nouveaux types d'inéquations ou d'inéquations quasi variationnelles d'évolution.

Le plan détaillé est le suivant: