

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 19 (1973)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LE CONTRÔLE OPTIMAL DE SYSTÈMES DISTRIBUÉS
Autor: Lions, J. L.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-46289>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 27.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

SUR LE CONTRÔLE OPTIMAL DE SYSTÈMES DISTRIBUÉS

par J. L. LIONS

1. INTRODUCTION ¹⁾

1.1. Le contrôle des systèmes distribués (c'est-à-dire des systèmes dont l'état est donné par la résolution d'une équation aux dérivées partielles) intervient dans un grand nombre d'applications. Sans vouloir, en aucune manière, tenter une liste exhaustive d'applications, signalons :

(1) Le contrôle de diverses réactions enzymatiques en biochimie (Cf. J. P. Kernevez [1], J. P. Kernevez et Thomas [1]) où l'état est, en général, donné par un ensemble d'équations paraboliques non linéaires;

(2) beaucoup de problèmes dans la théorie de la diffusion de la chaleur (Cf. Butkovski [1], P. K. C. Wang [1], Yvon [1]);

(3) un grand nombre de problèmes en chimie, pour lesquels nous renvoyons aux comptes rendus du congrès de l'IFAC, Banff, Canada, 1971;

(4) des problèmes liés à la théorie des marées; Cf. G. F. Duff [1];

(5) des problèmes de pollution (Cf. Hullet [1]).

Dans ces problèmes, le contrôle s'effectue généralement par des *contrôles frontières* ou des *contrôles « ponctuels »* à l'intérieur du domaine.

Mais dans toute une série de problèmes de *conception optimale* (optimum design) intervenant en particulier en Mécanique, le contrôle est *le domaine lui-même* (contrôle « géométrique »).

Enfin, tous les problèmes évoqués précédemment se posent dans un cadre *déterministe* ou *stochastique* (Cf. Bensoussan [1] [2], J. P. Kernevez [2], Balakrishnan et J. L. Lions [1]).

¹⁾ L'exposé qui suit correspond à quatre conférences faites, à l'invitation du professeur PONTRYAGIN et de l'Académie des sciences d'URSS, dans le cadre des conférences de l'Union Mathématique internationale, au séminaire des professeurs NIKOLSKI et PONTRYAGIN à l'Institut Stekloff, Moscou, Novembre 1972. Un exposé sur les aspects numériques des problèmes étudiés a été fait, dans le même cadre, au séminaire du professeur TYCHONOFF; les détails ne sont pas donnés ici.

1.2. Une fois connu l'état $y(v)$ du système (v désigne le contrôle qui peut être assujéti à un certain nombre de contraintes), on veut *minimiser* une « fonction coût » ¹⁾:

$$(*) \quad J(v) = \Phi(g(v)) + \psi(v)$$

où Φ correspond à l'objectif à atteindre et ψ correspond au coût du contrôle lui-même.

1.3. Les problèmes à résoudre sont alors:

(i) l'étude de l'existence de une ou plusieurs solutions du problème;

(ii) l'obtention de conditions nécessaires, ou nécessaires et suffisantes pour l'optimalité, et, en particulier, l'extension du principe du maximum de Pontryagin (Cf. Pontryagin, Boltyanskii, Gamkrelidze et Mishenko [1]); cf. pour cela Yu. Egorov [1] [2];

(iii) l'étude du contrôle optimal, en particulier à partir du système de l'optimalité, qui est maintenant un ensemble d'équations aux dérivées partielles avec, dans le cas d'évolution, les conditions initiales, finales et des conditions aux limites sur la frontière du domaine (Cf. Lions [1] [2]);

(iv) l'étude des problèmes stochastiques correspondants (Cf. en particulier Bensoussan [1]), ce qui conduit, entre autres questions, à la nécessité de l'extension aux équations aux dérivées partielles de la théorie de Ito (Cf. Bensoussan [2], Bensoussan-Temam [1], Pardoux [1]);

(v) le problème de la synthèse (feedback) qui, dans le cas linéaire quadratique conduit à une équation aux dérivées partielles non linéaire avec une non linéarité quadratique correspondant à la composition de noyaux (Cf. Lions [1], [2] et un exemple au n° 3 ci-après);

il faut naturellement y ajouter le problème fondamental des *algorithmes numériques*, qui ne sont pas abordés ici.

1.4. Nous étudions dans la suite *certain aspects* ²⁾ des problèmes évoqués ci-dessus.

Le n° 2 étudie certains problèmes d'*existence* qui conduisent à des problèmes ouverts qui semblent intéressants, dans la théorie des équations

¹⁾ Dont le *choix* peut lui-même être un problème.

²⁾ Nous renvoyons à Lions [1] [2], Bensoussan [1], pour une étude systématique de certains points non étudiés ici (ou très brièvement évoqués); on trouvera aussi dans ces travaux une large bibliographie complémentaire.

aux dérivées partielles; on donne un contre exemple dû à Murat [1] et des résultats de Baranger [1]; pour d'autres aspects des problèmes d'existence, on pourra se reporter à D. Berkowitz [1], M. F. Bidaut [1], L. Cesari [1], I. Ekeland [1], I. Ekeland et R. Temam [1], Gamkrelidze [1] et à la bibliographie de ces travaux.

Le n° 3 rappelle d'abord certains résultats pour une équation d'état hyperbolique linéaire et une fonction coût quadratique et pour lesquels on peut établir certaines propriétés de comparaison qui peuvent être utiles (des résultats complémentaires dans ce sens sont donnés dans Lions [3]).

Le n° 4 donne très brièvement quelques exemples de problèmes où l'équation d'état est non linéaire (ce sont, dans les applications les exemples les plus fréquents). Lorsque la solution (c'est-à-dire l'état) dépend différentiablement du contrôle, on peut facilement donner des conditions nécessaires (il semble que l'étude systématique de la suffisance éventuelle de ces conditions reste à faire). Le cas — qui est assez fréquent — où la dépendance est *non* différentiable semble largement ouvert; nous en donnons un exemple; c'est le cas en particulier de tous les systèmes gouvernés par des *inéquations variationnelles* (Cf. Duvaut-Lions [1] pour des exemples en Physique et en Mécanique).

Le n° 5 étudie des problèmes asymptotiques qui sont directement liés à la théorie des perturbations singulières. Il y a essentiellement deux situations: (i) l'équation d'état peut contenir un « petit » paramètre et on utilise la théorie des couches limites au niveau de l'équation d'état; nous renvoyons à Lions [5], Chapitre 7; (ii) un petit paramètre peut apparaître dans la fonction ψ (Cf. Formule (*)), ce qui correspond à un contrôle « bon marché » — une situation qui est assez fréquente —. On étudie cet aspect au n° 5, ce qui conduit à (pensons-nous) d'intéressantes questions de perturbations singulières pour des opérateurs pseudo-différentiels et à de nouveaux problèmes relatifs à des équations non linéaires non homogènes (on utilise un résultat non encore publié de H. Brezis [2] et la théorie de l'interpolation non linéaire, Lions [6], J. Peetre [1]).

Le n° 6 présente brièvement certains résultats de Bensoussan, Goursat et l'auteur (Cf. A. Bensoussan et J. L. Lions [1] [2] et A. Bensoussan, M. Goursat et J. L. Lions [1] pour une étude plus complète) relatifs à certains problèmes de contrôle stochastique (gestion optimale, temps d'arrêts) et qui conduisent à l'étude de nouveaux types d'inéquations ou d'inéquations quasi variationnelles d'évolution.

Le plan détaillé est le suivant:

2. PROBLÈMES D'EXISTENCE

- 2.1. Un problème de contrôle dans les coefficients
- 2.2. Un contre exemple
- 2.3. Un résultat général d'existence
- 2.4. Application au problème de contrôle dans les coefficients

3. CAS LINÉAIRE QUADRATIQUE — REMARQUES SUR LE SYSTÈME D'OPTIMALITÉ

- 3.1. Un système hyperbolique
- 3.2. Système d'optimalité
- 3.3. Propriétés de comparaison
- 3.4. Cas sans contrainte — Equation intégro-différentielle de Riccati

4. EQUATIONS D'ÉTAT NON LINÉAIRES

- 4.1. Cas différentiable
- 4.2. Cas non différentiable

5. PHÉNOMÈNES DE PERTURBATIONS SINGULIÈRES

- 5.1. Orientation
- 5.2. Cas d'un système linéaire
- 5.3. Cas d'un système non linéaire
- 5.4. Remarques sur certains problèmes elliptiques non linéaires non homogènes

6. PROBLÈMES DE GESTION OPTIMALE ET INÉQUATIONS VARIATIONNELLES

- 6.1. Un problème de gestion optimale
- 6.2. Réduction à une inéquation quasi variationnelle d'évolution
- 6.3. Problèmes de temps d'arrêt optimal

BIBLIOGRAPHIE

2. PROBLÈMES D'EXISTENCE

2.1. Un problème de contrôle dans les coefficients

Soit Ω un ouvert borné de \mathbf{R}^n , de frontière Γ régulière. L'ensemble des contrôles est défini par ¹⁾:

$$(2.1) \quad \mathcal{U}_{ad} = \{v \mid v \in L^\infty(\Omega), 0 < m \leq v(x) \leq M < \infty \text{ p.p. dans } \Omega\}$$

(\mathcal{U}_{ad} = ensemble des contrôles *admissibles*).

Pour $v \in \mathcal{U}_{ad}$, l'état $y(v)$ du système est défini par la solution du problème elliptique:

$$(2.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) v(x) \frac{\partial y}{\partial x_j} \right) = f \text{ dans } \Omega, \\ y = 0 \text{ sur } \Gamma, \end{array} \right.$$

où f est donné par exemple dans $L^2(\Omega)$ et où les a_{ij} sont donnés avec:

$$(2.3) \quad a_{ij} \in L^\infty(\Omega), \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \alpha \sum_{i=1}^n \xi_i^2, \alpha > 0.$$

Le problème (2.2) admet une solution unique:

$$(2.4) \quad y(v) \in H_0^1(\Omega)^2).$$

La fonction coût est par exemple:

$$(2.5) \quad J(v) = \left(\int_{\Omega} |y(v) - z_d|^2 dx \right)^{1/2},$$

où z_d (état désiré) est donné dans $L^2(\Omega)$. Le problème est alors de *minimiser* $J(v)$ lorsque v parcourt \mathcal{U}_{ad} .

Pour des exemples physiques où ce problème intervient, Cf. K. A. Lure [1]; on ignore s'il existe $u \in \mathcal{U}_{ad}$ tel que $J(u) = \inf. J(v), v \in \mathcal{U}_{ad}$. On va voir, suivant Murat [1] que la réponse est *négative* pour un problème très voisin du précédent.

¹⁾ Toutes les fonctions utilisées sont à valeurs réelles.

²⁾ $H^1(\Omega)$ désigne l'espace de Sobolev (Cf. Sobolev [1]) des fonctions $\varphi \in L^2(\Omega)$ telles que $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), i = 1, \dots, n$ et $H_0^1(\Omega)$ le sous espace des $\varphi \in H^1(\Omega)$ tels que $\varphi = 0$ sur Γ .

2.2. Un contre exemple

On considère le cas *unidimensionnel*

$$(2.6) \quad \Omega =]0,1[$$

\mathcal{U}_{ad} étant encore défini par (2.1), avec:

$$m = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}}, \quad M = \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2}}.$$

On suppose que l'état est maintenant donné par $y(v) = y$ solution de:

$$(2.7) \quad -\frac{d}{dx} \left(v(x) \frac{dy}{dx} \right) + vy = 0, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 2$$

et la fonction coût par (2.5) avec $z_d = 1 + x^2$, i.e.

$$(2.8) \quad J(v) = \left(\int_0^1 |y(v) - (1+x^2)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

On va vérifier rapidement que:

$$(2.9) \quad \text{Inf } J(v) = 0, \quad v \in \mathcal{U}_{ad}$$

et que:

$$(2.10) \quad \text{il n'existe pas } u \in \mathcal{U}_{ad} \text{ tel que } J(u) = 0.$$

Pour montrer (2.9), on remarque que l'on peut construire une suite v_n de \mathcal{U}_{ad} telle que:

$$(2.11) \quad \left| \begin{array}{l} v_n \rightarrow v_0 = 1 \text{ dans } L^\infty(\Omega) \text{ faible étoile,} \\ \frac{1}{v_n} \rightarrow \frac{1}{w_0}, \quad w_0 = \frac{1}{2} + \frac{x^2}{6}, \text{ dans } L^\infty(\Omega) \text{ faible étoile.} \end{array} \right.$$

$$\text{(Prendre } v_n(x) = 1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{x^2}{6} \right)^{1/2} \text{ si } \frac{m}{n} < x \leq \frac{2m+1}{2n},$$

$$1 + \left(\frac{1}{2} - \frac{x^2}{6} \right)^{1/2} \text{ si } \frac{2m+1}{2n} < x \leq \frac{m+1}{n},$$

$$m = 0, 1, \dots, n-1).$$

Posons $y(v_n) = y_n$. On vérifie aussitôt que y_n est *borné* dans $H^1(\Omega)$ et donc que l'on peut extraire une sous-suite, encore notée y_n , telle que:

$$(2.12) \quad y_n \rightarrow y_0 \text{ dans } H^1(\Omega) \text{ faible.}$$

Mais l'injection de $H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ étant compacte, il en résulte que:

$$(2.13) \quad y_n \rightarrow y_0 \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ fort.}$$

Par ailleurs, on déduit de (2.7), avec $v = v_n$, que:

$$\frac{d}{dx} \left(v_n \frac{dy_n}{dx} \right) = v_n y_n \in \text{borné de } L^2(\Omega)$$

et par conséquent, on peut supposer, toujours par extraction éventuelle d'une sous-suite, que:

$$(2.14) \quad v_n \frac{dy_n}{dx} \rightarrow \chi_0 \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ fort,}$$

et:

$$(2.15) \quad - \frac{d}{dx} \chi_0 + v_0 y_0 = 0.$$

Mais on déduit de (2.14) et (2.11) que:

$$\frac{1}{v_n} \left(v_n \frac{dy_n}{dx} \right) \rightarrow \frac{1}{w_0} \chi_0 \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ faible}$$

et comme $\frac{1}{v_n} \left(v_n \frac{dy_n}{dx} \right) = \frac{dy_n}{dx} \rightarrow \frac{dy_0}{dx}$ dans $H^{-1}(\Omega)$ faible (espace dual de $H_0^1(\Omega)$), on a donc:

$$\frac{1}{w_0} \chi_0 = \frac{dy_0}{dx}$$

et (2.15) donne donc:

$$(2.16) \quad - \frac{d}{dx} \left[w_0 \frac{dy_0}{dx} \right] + v_0 y_0 = 0$$

et (2.12) donne:

$$(2.17) \quad y_0(0) = 1, \quad y_0(1) = 2.$$

On remplace v_0 et w_0 par leurs valeurs (2.11) et on vérifie alors que (2.16) (2.17) impliquent $y_0(x) = 1 + x^2$ de sorte que $J(v_n) \rightarrow 0$.

Vérifions maintenant (2.10); si un tel u existait, on aurait nécessairement $y(u) = 1 + x^2$, d'où en portant dans (2.7) (où l'on prend $v = u$):

$$-\frac{d}{dx}(2xu) + u(1+x^2) = 0, \text{ d'où:}$$

$$(2.18) \quad u = Cx^{-1/2} \exp. \left(\frac{x^2}{4} \right); \quad C = \text{constante};$$

or, il n'existe aucune fonction de la forme (2.18) qui puisse être dans \mathcal{U}_{ad} .

Remarque 2.1.

Si l'on prend $J(v) = \left(\int_0^1 |y(v) - z_d(x)|^2 dx \right)^{1/2}$, on peut se demander pour quelle classe de z_d le problème n'admet pas de solution. Pour des résultats dans ce sens, Cf. F. Murat-L. Tartar [1], M. F. Bidaut [1].

Remarque 2.2.

On trouvera d'autres contre exemples (pour les dimensions supérieures et des systèmes paraboliques) dans Murat [1] [2].

Remarque 2.3.

Pour l'étude de problèmes *relaxés* attachés à des problèmes du type précédent, Cf. L. Cesari [1].

2.3. Un résultat général d'existence

Nous mentionnons maintenant un résultat de J. Baranger [1], que nous utiliserons aux n° suivants, et en particulier au n° 2.4. ci-après pour la résolution d'un problème « voisin » de celui du n° 2.1.

On considère, dans un espace de Banach X sur \mathbf{R} uniformément réflexif, dont la norme est notée $\| \cdot \|$, une fonction:

$$(2.19) \quad \left| \begin{array}{l} \varphi \rightarrow M(\varphi) \text{ semi continu inférieurement (s.c.i.) de} \\ X \rightarrow \mathbf{R}, \quad M(\varphi) \geq c > -\infty, \end{array} \right.$$

et un ensemble $S \subset X$ avec:

$$(2.20) \quad S \text{ est fermé dans } X.$$

(en particulier S n'est pas nécessairement convexe).

On considère alors, pour $\xi \in X$, le problème

$$(2.21) \quad \inf_{\varphi \in S} [J(\varphi) + \|\xi - \varphi\|].$$

On a (Baranger, loc. cit.) le

THÉORÈME 2.1. *On peut choisir ξ dans un ensemble $\mathcal{X} \subset X$, dense dans X , ¹⁾ de sorte qu'alors le problème (2.21) admette une solution (i.e. il existe alors $\varphi_0 \in S$) tel que*

$$J(\varphi_0) + \|\xi - \varphi_0\| = \inf_{\varphi \in S} [J(\varphi) + \|\xi - \varphi\|].$$

Si $J = 0$, c'est un théorème dû à Edelstein [1].

2.4. Application au problème de contrôle dans les coefficients

Pour $\xi \in L^2(\Omega)$, on introduit (l'état $y(v)$ étant donné par (2.2)) :

$$(2.22) \quad J_\varepsilon(v) = \left(\int_\Omega |y(v) - z_d|^2 dx \right)^{1/2} + \varepsilon \|v - \xi\|_{L^2(\Omega)}$$

$$\varepsilon > 0.$$

On est alors dans les conditions d'application du Théorème 2.1, si l'on prend :

$$X = L^2(\Omega), \quad S = \mathcal{U}_{ad},$$

$$J(v) = \frac{1}{\varepsilon} \left(\int_\Omega |y(v) - z_d|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Donc: *On peut choisir ξ dans un ensemble dense de $L^2(\Omega)$ de manière qu'alors il existe $u \in \mathcal{U}_{ad}$ tel que*

$$J_\varepsilon(u) = \inf_{v \in \mathcal{U}_{ad}} J_\varepsilon(v).$$

Remarque 2.4

Les problèmes du type « contrôle dans les coefficients » se rattachent également aux résultats de Spagnolo [1] [2] et Marino-Spagnolo [1].

¹⁾ M^{lle} F. Bidaut [1] a montré qu'il existe x ensemble G_δ dense avec la propriété.

3. CAS LINÉAIRE QUADRATIQUE — REMARQUES SUR LE SYSTÈME D'OPTIMALITÉ

3.1. Un système hyperbolique

On reprend ici certains points de Lions [3]: dans un ouvert borné Ω de \mathbf{R}^n de frontière Γ régulière, on considère l'opérateur A défini par:

$$(3.1) \quad A\varphi = \sum_{i=1}^n a_i(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$$

où les fonctions $a_i \in C^1(\bar{\Omega})$; [on pourrait aussi bien considérer des fonctions dépendant de x et t ; nous nous bornons au cas où les a_i ne dépendent pas de t uniquement pour un peu simplifier l'exposé]. On introduit:

$$\Gamma_- = \{x \mid x \in \Gamma, \sum_{i=1}^n a_i(x) \nu_i \leq 0\}$$

$$\Gamma_+ = \{x \mid x \in \Gamma, \sum_{i=1}^n a_i(x) \nu_i \geq 0\}$$

où $\nu = \{\nu_i\}$ désigne la normale à Γ dirigée vers l'extérieur de Ω .

On suppose que l'état $y = y(v) = y(x, t; v)$ du système est défini par la solution du *problème mixte hyperbolique*:

$$(3.2) \quad \frac{\partial y}{\partial t} + Ay = f + v \text{ dans } Q = \Omega \times]0, T[$$

$$(3.3) \quad y = 0 \text{ sur } \Sigma_- = \Gamma_- \times]0, T[$$

$$(3.4) \quad y(x, 0) = y_0(x), \quad x \in \Omega$$

où f et y_0 sont donnés avec:

$$(3.5) \quad f \in L^2(Q), \quad y_0 \in L^2(\Omega)$$

et où $v \in \mathcal{U}_{ad}$ avec:

$$(3.6) \quad \mathcal{U}_{ad} = \text{ensemble convexe fermé non vide de } L^2(Q).$$

Remarque 3.1.

Il s'agit donc dans le problème précédent d'un *contrôle distribué*. (Cf. à ce sujet la Remarque 3.3. ci-après).

La *fonction coût* est donnée par:

$$(3.7) \quad J(v) = \int_Q |y(v) - z_d|^2 dx dt + N \int_Q v^2 dx dt,$$

où z_d est donnée dans $L^2(Q)$ et où N est donné > 0 .

Le problème

$$(3.8) \quad \begin{aligned} & \inf J(v) \\ & v \in \mathcal{U}_{ad} \end{aligned}$$

admet une *solution unique* (vérification immédiate) pour laquelle nous allons écrire le « *système d'optimalité* ».

3.2. Système d'optimalité

Soit u la solution de (3.8). On pose $y(u) = y$ et l'on définit l'état adjoint p par ¹⁾:

$$(3.9) \quad -\frac{\partial p}{\partial t} + A^*p = y - z_d,$$

$$(3.10) \quad p = 0 \text{ sur } \Sigma_+ = \Gamma_+ \times]0, T[,$$

$$(3.11) \quad p(x, T) = 0 \text{ sur } \Omega.$$

Le contrôle u est *caractérisé* par:

$$(3.12) \quad \int_Q (y - z_d)(y(v) - y) dx dt + N \int_Q u(v - u) dx dt \geq 0, \forall v \in \mathcal{U}_{ad}.$$

Mais on déduit facilement de (3.9), (3.10), (3.11) que:

$$\int_Q (y - z_d)(y(v) - y) dx dt = \int_Q p(v - u) dx dt$$

¹⁾ A^* est défini par $A^* \varphi = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (a_i \varphi)$.

de sorte que (3.12) équivaut à :

$$(3.13) \quad \int_Q (p + Nu) (v - u) \, dx \, dt \geq 0, \quad \forall v \in \mathcal{U}_{ad}.$$

Introduisons :

$$(3.14) \quad \Pi = \text{opérateur de projection dans } L^2(Q) \text{ sur } \mathcal{U}_{ad}.$$

Alors (3.13) équivaut à :

$$(3.15) \quad u = \Pi \left(-\frac{p}{N} \right),$$

Par conséquent, *le contrôle optimal est donné par la résolution du système en $\{y, p\}$:*

$$(3.16) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial y}{\partial t} + Ay - \Pi \left(-\frac{p}{N} \right) = f, \\ -\frac{\partial p}{\partial t} + A^*p - y = -z_d, \\ y = 0 \text{ sur } \Sigma_-, \quad p = 0 \text{ sur } \Sigma_+, \\ y(x, 0) = y_0(x), \quad p(x, T) = 0 \text{ sur } \Omega, \end{array} \right.$$

puis par (3.15).

Remarque 3.2.

Puisque le problème (3.16) équivaut au problème initial, le système *non linéaire* (3.16) *admet une solution unique.*

Remarque 3.3.

Supposons que le contrôle ne soit plus distribué mais de la forme :

$$(3.17) \quad v(x, t) = \sum_{i=1}^m v_i(t) w_i(t)$$

où les fonctions w_i sont *données* dans $L^2(\Omega)$ (et en général dans les applications à support compact « assez petit »), les fonctions v_i étant les contrôles, assujettis aux contraintes :

$$(3.18) \quad v_i \in \mathcal{U}_{i, ad} = \text{convexe fermé non vide de } L^2(0, T), \quad i = 1, \dots, m.$$

Supposons la fonction coût donnée alors par :

$$(3.19) \quad \left| \begin{array}{l} J(v) = \int_Q |y(v) - z_d|^2 dx dt + \sum_{i=1}^m N_i \int_0^T v^2 dt, \\ N_i > 0. \end{array} \right.$$

Soit $u = \{u_1, \dots, u_m\}$ le contrôle optimal. Le système de l'optimalité est maintenant donné de la façon suivante: soit

$$(3.20) \quad \Pi_i = \text{opérateur de projection dans } L^2(0, T) \text{ sur } \mathcal{U}_{i,ad};$$

alors :

$$(3.21) \quad \left| \begin{array}{l} \frac{\partial y}{\partial t} + Ay - \sum_{i=1}^m \Pi_i \left(-\frac{p_i}{N_i} \right) w_i = f, \\ -\frac{\partial p}{\partial t} + A^*p - y = -z_d, \\ p_i(t) = \int_{\Omega} p(x, t) w_i(x) dx, \\ y = 0 \text{ sur } \Sigma_-, p = 0 \text{ sur } \Sigma_+, \\ y(x, 0) = y_0(x), p(x, T) = 0 \text{ sur } \Omega, \end{array} \right.$$

et

$$(3.22) \quad u_i = \Pi_i \left(-\frac{p_i}{N_i} \right).$$

Nous ignorons dans quelle mesure on peut étendre à (3.21) les résultats de comparaison relatifs à (3.16) établis au n° 3.3. ci-après.

Remarque 3.4.

Si l'on prend *par exemple* :

$$(3.23) \quad \mathcal{U}_{ad} = \{v \mid v \geq 0 \text{ p.p. dans } Q\},$$

alors $\Pi(\varphi) = \varphi^+ (= \sup(\varphi, 0))$, de sorte que (3.16) devient dans ce cas :

$$(3.24) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial y}{\partial t} + Ay - \frac{p^-}{N} = f, \\ \\ - \frac{\partial p}{\partial t} + A^*p - y = z_d, \\ \\ y = 0 \text{ sur } \Sigma_-, \quad p = 0 \text{ sur } \Sigma_+, \\ \\ y(x, 0) = y_0(x), \quad p(x, T) = 0 \text{ sur } \Omega. \end{array} \right.$$

On voit l'importance (puisque $u = \frac{p^-}{N}$) de la « surface de commutation » séparant la région où $p > 0$ de celle où $p < 0$, le contrôle u étant nul dans la 1^{re} région.

Remarque 3.5.

Pour une étude systématique des divers systèmes d'optimalité pour des équations d'état de natures variées et pour des contrôles distribués ou frontière, nous renvoyons à Lions [1] [2]. On fait en particulier usage, dans le cas des contrôles frontière, de la théorie des problèmes aux limites non homogènes telle qu'exposée dans Lions-Magenes [1].

3.3. Propriétés de comparaison

On suppose maintenant que \mathcal{U}_{ad} est donné par :

$$(3.25) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{U}_{ad} = \{v \mid v \in L^2(Q), \alpha(x, t) \leq v(x, t) \leq \beta(x, t) \text{ p.p.}, \\ \alpha \text{ et } \beta \text{ étant deux fonctions mesurables quelconques} \}. \end{array} \right.$$

On suppose dans (3.16) que z_d et N sont *fixés*¹⁾. On désigne par $\{y_i, p_i\}$ ($i = 1, 2$) la solution de (3.24) correspondant à $f = f_i, y_0 = y_{0i}$. On a alors le :

THÉORÈME 3.1. *On suppose que (3.25) a lieu et que*

$$(3.26) \quad f_1 \leq f_2, \quad y_{01} \leq y_{02} \text{ p.p.}$$

¹⁾ On trouvera d'autres cas dans Lions [3].

On a alors :

$$(3.27) \quad p_1 \leq p_2 \text{ (et donc } u_1 \geq u_2) \text{ p.p. dans } Q.$$

Démonstration

Posons: $z = y_1 - y_2$, $q = p_1 - p_2$. On déduit de (3.16) que:

$$(3.28) \quad \left. \begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial t} + Az - \left(\Pi \left(-\frac{p_1}{N} \right) - \Pi \left(-\frac{p_2}{N} \right) \right) &= f_1 - f_2, \\ -\frac{\partial q}{\partial t} + A^* q - z &= 0, \\ z &= 0 \text{ sur } \Sigma_-, \quad q = 0 \text{ sur } \Sigma_+, \\ z(x, 0) &= y_{01}(x) - y_{02}(x), \quad q(x, T) = 0 \text{ dans } \Omega. \end{aligned} \right\}$$

On pose $(\varphi, \psi)_Q = \int_Q \varphi \psi \, dx \, dt$, $(\varphi, \psi) = \int_\Omega \varphi \psi \, dx$. On multiplie la 1^{re} équation (3.28) par q^+ et l'on intègre sur Q . Il vient:

$$(3.29) \quad \left(z, \left(-\frac{\partial}{\partial t} + A^* \right) q^+ \right)_Q - (y_{01} - y_{02}, q^+(0)) + X = (f_1 - f_2, q^+)_Q$$

où

$$(3.30) \quad X = - \left(\Pi \left(-\frac{p_1}{N} \right) - \Pi \left(-\frac{p_2}{N} \right), (p_1 - p_2)^+ \right)_Q.$$

Utilisant la 2^e équation (3.28) et posant $\Lambda = -\frac{\partial}{\partial t} + A^*$, on peut écrire (3.29) sous la forme:

$$(3.31) \quad (\Lambda q, \Lambda q^+)_Q + X = (f_1 - f_2, q^+)_Q + (y_{01} - y_{02}, q^+(0)),$$

d'où, comme Λ est un opérateur différentiel du 1^{er} ordre

$$(3.32) \quad |\Lambda q^+|_Q^2 + X = (f_1 - f_2, q^+)_Q + (y_{01} - y_{02}, q^+(0)).$$

Si l'on pose $-\frac{p_i}{N} = \varphi_i$, on a:

$$\begin{aligned}
 (3.33) \quad X &= -N(\Pi(\varphi_1) - \Pi(\varphi_2), (\varphi_1 - \varphi_2)^-)_Q \\
 &= N \int_Q (\Pi(\varphi_1) - \Pi(\varphi_2))(\varphi_1 - \varphi_2) dx dt \\
 &\quad \varphi_1 \leq \varphi_2.
 \end{aligned}$$

Mais on vérifie que $(\Pi(\varphi_1) - \Pi(\varphi_2))(\varphi_1 - \varphi_2) \geq 0$ p.p. d'où

$$(3.34) \quad X \geq 0.$$

D'après (3.26), le 2^e membre de (3.32) est ≤ 0 , ce qui, avec (3.34) donne:

$$\wedge q^+ = 0.$$

Comme $q^+ = 0$ sur Σ_+ et $q^+(x, T) = 0$, on a $q^+ = 0$ d'où (3.27).

3.4. Cas sans contrainte — Equation intégral-différentielle de Riccati

Considérons maintenant, toujours dans le cadre du système (3.16), le cas « sans contraintes », i.e.

$$(3.35) \quad \mathcal{U}_{ad} = L^2(Q).$$

Alors (3.16) s'écrit:

$$\begin{aligned}
 (3.36) \quad & \left. \begin{aligned}
 \frac{\partial y}{\partial t} + Ay + \frac{p}{N} &= f, \\
 -\frac{\partial p}{\partial t} + A^*p - y &= -z_d, \\
 y &= 0 \text{ sur } \Sigma_-, \quad p = 0 \text{ sur } \Sigma_+, \\
 y(x, 0) &= y_0(x), \quad p(x, T) = 0 \text{ sur } \Omega;
 \end{aligned} \right\}
 \end{aligned}$$

il s'agit maintenant d'un problème *linéaire* avec des conditions aux limites pour $t = 0$ et $t = T$. Il est connu (Cf. Lions [1]) que tous les systèmes de ce genre peuvent se ramener à la résolution d'une équation *non linéaire* d'évolution et d'une équation hyperbolique linéaire.

On va expliciter cela, sans donner les détails des démonstrations.

On considère le système pour $s < t < T$ où s est fixé (quelconque) dans $]0, T[$:

$$(3.37) \quad \left. \begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + A \varphi + \frac{1}{N} \psi &= 0, \\ -\frac{\partial \psi}{\partial t} + A^* \psi - \varphi &= 0, \\ \varphi = 0 \text{ sur } \Gamma_- X]s, T[, \psi = 0 \text{ sur } \Gamma_+ X]s, T[\\ \varphi(x, s) = h(x), \psi(x, T) = 0 \text{ sur } \Omega \end{aligned} \right\}$$

qui admet une solution unique; en fait il s'agit là du système d'optimalité pour le problème suivant: l'état est donné par $\bar{y}(v)$ solution de:

$$(3.38) \quad \frac{\partial \bar{y}}{\partial t} + A \bar{y} = v, \bar{y}(s) = h, t > s$$

et la fonction coût par:

$$(3.39) \quad \int_s^T |\bar{y}(v)|^2 dt + N \int_s^T |v|^2 dt = \mathcal{J}_s^h(v)$$

(où $|v|^2 = \int_{\Omega} v(x)^2 dx$), et on minimise $\mathcal{J}_s^h(v)$ sans contraintes.

Donc le système (3.37) admet une solution unique, donc définit de manière unique $\psi(s) \in L^2(\Omega)$.

L'application $h \rightarrow \psi(s)$ est linéaire continu de $L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$, donc:

$$(3.40) \quad \psi(s) = P(s) h, P(s) \in \mathcal{L}(H; H), H = L^2(\Omega).$$

On vérifie alors que l'on a l'identité (Cf. Lions, loc. cit.)

$$(3.41) \quad p(t) = P(t) y(t) + r(t).$$

On peut calculer P et r par un *calcul d'identification* (il faut vérifier que les calculs effectués ci-après de façon formelle sont loisisbles). On

obtient, (en posant de manière générale $\frac{dg}{dt} = g'$),

$$(3.42) \quad -P'y - Py' - r' + A^* Py + A^* r - y = -z_d,$$

et en remplaçant dans (3.42) y' par sa valeur tirée de la première équation (3.36), on a finalement:

$$(3.43) \quad -P'y + P\left(Ay + \frac{P}{N} - f\right) - r' + A^* Py + A^* r - y = -z_d.$$

On peut encore remplacer dans (3.43) p par sa valeur (3.41), d'où:

$$-P'y + PAy + A^*Py + \frac{1}{N}PPy - y - r' + A^*r + \frac{1}{N}Pr - Pf = -z_d$$

et cela est une identité en y , d'où:

$$(3.44) \quad -\frac{\partial P}{\partial t} + PA + A^*P + \frac{1}{N}P \circ P = I$$

et

$$(3.45) \quad -\frac{\partial r}{\partial t} + A^*r + \frac{1}{N}Pr = Pf - z_d.$$

Comme $p(T) = 0$, on doit avoir:

$$(3.46) \quad P(T) = 0, r(T) = 0.$$

On vérifie enfin à partir de (3.37) que:

$$(3.47) \quad P(t)^* = P(t) \text{ dans } \mathcal{L}(H; H)$$

et que

$$(3.48) \quad P(t) \geq 0 \text{ dans } \mathcal{L}(H; H).$$

Plus précisément, on vérifie que:

$$(3.49) \quad (P(s)h, h) = \inf_v \mathcal{J}_s^h(v).$$

On note encore que:

$$(3.50) \quad P(t)h \in D(A^*), r(t) \in D(A^*).$$

D'après le théorème des noyaux de L. Schwartz [1], on peut représenter (de façon unique), l'opérateur $P(t)$ par un *noyau* $P(x, \xi, t)$ et on peut résumer les informations ci-dessus dans l'ensemble des conditions suivantes:

$$(3.51) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial P}{\partial t} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (a_i(x) P(x, \xi, t)) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \xi_i} (a_i(\xi) P(x, \xi, t)) \\ + \frac{1}{N} \int_{\Omega} P(x, \xi, t) P(\xi, \xi, t) d\xi = \delta(x - \xi) \text{ dans } \Omega \times \Omega \times]0, T[, \\ P(x, \xi, t) = P(\xi, x, t), \end{array} \right.$$

$$P(x, \xi, t) = 0 \text{ si } x \in \Gamma_+, \xi \in \Omega, t \in]0, T[,$$

$$P(x, \xi, T) = 0 \text{ sur } \Omega \times \Omega,$$

$$\forall h \in L^2(\Omega), \int_{\Omega} P(x, \xi, t) h(\xi) d\xi \in L^2(\Omega) \text{ et}$$

$$\iint_{\Omega \times \Omega} P(x, \xi, t) h(x) h(\xi) dx d\xi \geq 0.$$

Ce problème admet une solution unique. La fonction $r = r(x, t)$ est ensuite déterminée par :

$$(3.52) \quad \left\{ \begin{aligned} & -\frac{\partial r}{\partial t} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (a_i(x) r(x, t)) + \frac{1}{N} \int_{\Omega} P(x, \xi, t) r(\xi) d\xi \\ & = \int_{\Omega} P(x, \xi, t) f(\xi, t) d\xi - z_d(x, t), \\ & r(x, t) = 0 \text{ si } x \in \Gamma_+, t \in]0, T[, \\ & r(x, T) = 0. \end{aligned} \right.$$

On va maintenant démontrer le

THÉORÈME 3.2. La solution $P(x, \xi, t)$ de (3.51) vérifie :

$$(3.53) \quad P(x, \xi, t) \geq 0 \text{ p.p. sur } \Omega \times \Omega.$$

Démonstration

Considérons le système (3.37) avec h donnée ≥ 0 p.p. dans Ω .

On aura (3.53) si l'on montre que $\psi \geq 0$ p.p. dans $\Omega \times]s, T[$. Pour cela, on multiplie la 1^{re} équation (3.37) par ψ^- , il vient :

$$\int_{\Omega \times]s, T[} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + A\varphi \right) \psi^- dx dt - \frac{1}{N} \int_{\Omega \times]s, T[} (\psi^-)^2 dx dt = 0;$$

intégrant par parties et posant $\Lambda = -\frac{\partial}{\partial t} + A^*$, il vient :

$$- \int_{\Omega} h(x) \psi^-(x, s) dx + \int_{\Omega \times]s, T[} \varphi (\Lambda \psi^-) dx dt - \frac{1}{N} \int_{\Omega \times]s, T[} (\psi^-)^2 dx dt = 0$$

d'où, en tenant compte de la 2^e équation (3.37):

$$\begin{aligned}
 - \int_{\Omega} h(x) \psi^{-}(x, s) dx + \int_{\Omega \times]s, T[} (\wedge \psi) (\wedge \psi^{-}) dx dt \\
 - \frac{1}{N} \int_{\Omega \times]s, T[} (\psi^{-})^2 dx dt = 0
 \end{aligned}$$

d'où:

$$\begin{aligned}
 (3.54) \quad \int_{\Omega} h(x) \psi^{-}(x, s) dx + \int_{\Omega \times]s, T[} (\wedge \psi^{-})^2 dx dt \\
 + \frac{1}{N} \int_{\Omega \times]s, T[} (\psi^{-})^2 dx dt = 0.
 \end{aligned}$$

Comme $h \geq 0$, tous les termes sont positifs, donc $\psi^{-} = 0$.

Remarque 3.6.

On rencontre d'autres systèmes du type (3.51) pour des opérateurs paraboliques (Cf. Lions [1] [2]). D'autres systèmes, encore du même type, ont été obtenus à propos de problèmes stochastiques par Bismut [1].

Des études *directes* de ces systèmes (et d'autres, n'entrant pas, apparemment, dans le cadre de la théorie du contrôle) ont été faites par Da Prato et Temam, les résultats les plus complets étant obtenus, à partir de méthodes itératives nouvelles, par L. Tartar [1].

Remarque 3.7.

Le noyau P dépend du paramètre $N : P = P_N$. On montre (Cf. Lions [3]) que $P_N(x, \xi, t)$ décroît (p.p.) lorsque N décroît et que lorsque $N \rightarrow 0$, $P_N(x, \xi, t) \rightarrow 0$, au sens:

$$\forall h \in L^2(\Omega), \forall t \in [0, T], \iint_{\Omega \times \Omega} P_N(x, \xi, t) h(x) h(\xi) dx d\xi \rightarrow 0.$$

4. EQUATIONS D'ÉTAT NON LINÉAIRES

4.1. Cas différentiable

Nous avons jusqu'ici considéré des cas où l'équation d'état du système était *linéaire*. On rencontre dans les applications de nombreuses situations (c'est même, en fait, la situation habituelle!) où l'équation d'état est *non linéaire*.

On peut distinguer deux cas, selon que l'application $v \rightarrow y(v)$ est, ou non, différentiable.

Donnons un exemple de problème intervenant en biochimie ¹⁾; l'état (qui représente une concentration) est donné par:

$$(4.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \sigma \frac{y}{1+y} = f, \quad x \in]0, 1[, \quad t \in]0, T[, \\ \sigma = \text{constante} > 0, \end{array} \right.$$

$$(4.2) \quad y(x, 0) = y_0(x), \quad x \in]0, 1[$$

$$(4.3) \quad -\frac{\partial y}{\partial x}(0, t) = v(t), \quad \frac{\partial y}{\partial x}(1, t) = 0, \quad t \in]0, T[.$$

Les données f et y_0 et le contrôle v sont ≥ 0 .

On vérifie sans peine (Cf. les détails dans Kernevez [1]) que ce problème admet une *solution unique*, vérifiant:

$$(4.4) \quad y, \frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \frac{\partial y}{\partial t} \in L^2(Q), \quad Q = \Omega \times]0, T[, \quad \Omega =]0, 1[,$$

$$(4.5) \quad y \geq 0.$$

On peut, par exemple, commencer par résoudre le problème:

$$(4.6) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \sigma \frac{\varphi}{1+|\varphi|} = f,$$

avec les conditions (4.2) (4.3) inchangées, puis l'on vérifie que la solution φ de (4.6) (4.2) (4.3) est ≥ 0 , donc $\varphi = y$.

La solution de (4.1) (4.2) (4.3) étant notée $y(v)$, on considère la *fonction coût*:

$$(4.7) \quad J(v) = \int_Q |y(v) - z_d|^2 dx dt + N \int_0^T v^2 dt,$$

où z_d est donnée dans $L^2(Q)$.

Il est facile de voir que le problème:

$$(4.8) \quad \inf J(v), \quad v \in \mathcal{U}_{ad}$$

¹⁾ On trouvera dans les travaux de Kernevez et Thomas (Cf. la bibliographie) de très nombreux autres problèmes de contrôle en biochimie; on donne ici l'un des exemples les plus simples. Cf. aussi Brauner et Penel [1].

où

$$(4.9) \quad \mathcal{U}_{ad} = \text{ensemble convexe fermé non vide de } L^2(0, T), \text{ contenu dans l'ensemble des fonctions } \geq 0 \text{ p.p. sur } (0, T)$$

admet une solution (au moins).

Pour obtenir des conditions *nécessaires* d'optimalité, on utilise alors le fait que la fonction $v \rightarrow y(v)$ est *différentiable* de $\{L^2(0, T), v \geq 0\}$ dans $L^2(Q)$. Si l'on pose:

$$(4.10) \quad \bar{y} = \frac{d}{d\lambda} y(u + \lambda v) \Big|_{\lambda=0}$$

on vérifie que:

$$(4.11) \quad \left. \begin{aligned} & \frac{\partial \bar{y}}{\partial t} - \frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial x^2} + \sigma \frac{\bar{y}}{1+y} - \sigma \frac{\bar{y} y}{(1+y)^2} = 0, \\ & \bar{y}(x, 0) = 0, \\ & -\frac{\partial \bar{y}}{\partial x}(0, t) = v(t), \quad \frac{\partial \bar{y}}{\partial x}(1, t) = 0, \end{aligned} \right\}$$

où $y = y(u)$.

On introduit alors l'état adjoint et l'on obtient les conditions d'optimalité par des intégrations par parties (Cf. Kernevez [1], Lions [2]).

Remarque 4.1.

La fonction $v \rightarrow J(v)$ n'a pas de raison d'être convexe, et il n'y a donc pas de raison d'avoir unicité de la solution. Il serait intéressant d'étudier le nombre éventuel des solutions (minima globaux ou locaux). Nous rencontrerons encore des questions de ce type au n° 5 (Cf. par exemple Remarque 5.4.).

Remarque 4.2.

On trouvera d'autres exemples, relatifs à des problèmes de conduite de chauffe d'un four, dans J. P. Yvon [1].

4.2. Cas non différentiable

Voici un exemple de problème de contrôle intervenant également en biochimie. L'état est donné par l'équation:

$$(4.12) \quad \frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \sigma \frac{y}{1+y} = f + v, \quad x \in]0, 1[, \quad t \in]0, T[,$$

donc équation analogue à (4.1), avec cette fois *le contrôle distribué* $v \in \overline{\mathcal{U}}_{ad}$, où

$$(4.13) \quad \left| \begin{array}{l} \overline{\mathcal{U}}_{ad} = \text{ensemble fermé convexe non vide de } L^2(Q), \text{ contenu dans} \\ \text{les fonctions p.p. } \geq 0 \text{ dans } Q. \end{array} \right.$$

La *condition initiale* est identique à (4.2). Les *conditions aux limites* sont les suivantes: soit $h \geq 0$ donné; alors c étant une constante > 0 ,

$$(4.14) \quad - \frac{\partial y}{\partial x}(0, t) = -c(y-h)^+ \Big|_{x=0}, \quad \frac{\partial y}{\partial x}(1, t) = -c(y-h)^+ \Big|_{x=1}.$$

On vérifie encore que le problème (4.12) (4.2) (4.14) *admet une solution unique*, soit $y = y(v)$. Si la fonction coût est encore donnée par (4.7), le problème:

$$(4.15) \quad \text{Inf } J(v), \quad v \in \overline{\mathcal{U}}_{ad}$$

admet encore une solution (au moins), soit u .

Mais la fonction $\lambda \rightarrow \lambda^+$ n'étant pas différentiable à l'origine, l'application $v \rightarrow y(v)$ de $L^2(Q) \rightarrow L^2(Q)$ n'est plus différentiable, et l'obtention de conditions d'optimalité semble une question ouverte.

Remarque 4.3.

Du point de vue *numérique* (Cf. Yvon [1]) on introduit une fonction $\lambda \rightarrow \gamma(\lambda)$ *approximation différentiable* de $\lambda \rightarrow \lambda^+$ et l'on remplace (4.14) par:

$$(4.16) \quad \left| \begin{array}{l} - \frac{\partial y}{\partial x}(0, t) = -c \gamma(y(0, t) - h), \\ \\ \frac{\partial y}{\partial x}(1, t) = c \gamma(y(1, t) - h). \end{array} \right.$$

Soit $y^\gamma(v)$ le nouvel état, correspondant à (4.16). On montre que $y^\gamma(v) \rightarrow y(v)$ dans $L^2(Q)$ lorsque γ converge vers λ^+ (avec $\gamma(\lambda) = \lambda$ pour $\lambda \geq \lambda_0 > 0$) et l'on résout le problème de contrôle correspondant à $y^\gamma(v)$, la fonction $v \rightarrow y^\gamma(v)$ étant cette fois différentiable.

Remarque 4.4.

La situation décrite à la Remarque 4.3. précédente est typique des *inéquations variationnelles* intervenant en Physique et en Mécanique (Cf. Duvaut-Lions [1]) et pour la résolution numérique desquelles on emploie constamment des processus de régularisation analogues à ceux de la Remarque précédente (Cf. Glowinski, Lions, Tremolières [1] et la bibliographie de ce livre).

Remarque 4.5.

Dans tous les problèmes considérés jusqu'ici, mais en particulier *dans le cas des problèmes multiphases*, on peut avoir à considérer des fonctions coût de la forme:

$$(4.17) \quad J(v) = \int_{E(v)} |y(v) - z_d|^2 dx dt$$

où $E(v)$ est un ensemble géométrique défini à partir de $y(v)$ (par exemple $E(v)$ peut être l'ensemble où $y(v) > 0$).

De nombreux problèmes restent à résoudre dans cette direction. Un exemple, relatif aux équations de Stefan, est résolu dans Vasiliev [1].

5. PHÉNOMÈNES DE PERTURBATIONS SINGULIÈRES

5.1. Orientations

Des phénomènes de perturbations singulières apparaissent dans la théorie du contrôle optimal pour deux raisons:

(i) l'état du système peut être décrit par une équation (ou un ensemble d'équations) contenant un petit paramètre ε , soit $y_\varepsilon(v)$ cet état, correspondant à un contrôle v ; alors la théorie des perturbations (*singulières* si, comme c'est le cas le plus important, ε apparaît dans des dérivées d'ordre supérieur) permet de « remplacer » $y_\varepsilon(v)$ par un « état approché » plus simple $y(v)$ correspondant à la valeur $\varepsilon = 0$ et avec des « corrections »

correspondant aux *couches limites*; si $\theta_\varepsilon(v)$ désigne une telle correction, on est donc conduit à remplacer $y_\varepsilon(v)$ par $y(v) + \theta_\varepsilon(v)$ — ce qui conduit à un problème de contrôle optimal approché qui peut être plus simple; une question est alors évidemment d'analyser en fonction de ε l'erreur ainsi commise; nous ne développons pas ici ce point de vue, renvoyant à Lions [3], Chapitre 7;

(ii) la fonction coût contient, en général, un terme de la forme $N \|v\|^2$ où $\|v\|$ est une norme sur l'espace des contrôles et où N est un paramètre > 0 d'autant plus petit que v est « bon marché ». Cela conduit aux problèmes de contrôle où $N \rightarrow 0$; ce sont, comme on va voir, des problèmes de perturbations singulières.

5.2. Cas d'un système linéaire

Commençons par un exemple très simple. Dans un ouvert Ω borné de \mathbf{R}^n de frontière régulière Γ , on considère un système dont l'état $y = y(x, v) = y(v)$ est donné par:

$$(5.1) \quad A y(v) = f \text{ dans } \Omega,$$

$$(5.2) \quad \frac{\partial y(v)}{\partial \nu} = v \text{ sur } \Gamma$$

où A est un opérateur elliptique du 2^e ordre, $\frac{\partial}{\partial \nu}$ la dérivée conormale associée à A , et où f (resp. v) est pris dans $L^2(\Omega)$ (resp. $L^2(\Gamma)$).

On prendra par exemple A donné par:

$$(5.3) \quad A \varphi = - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right) + a_0 \varphi,$$

où les a_{ij} vérifient (2.3) et où $a_0 \in L^\infty(\Omega)$, $a_0(x) \geq \alpha_0 > 0$ p.p.

Le problème (5.1) (5.2) admet une solution unique:

$$(5.4) \quad y(v) \in H^1(\Omega).$$

La fonction coût est donnée par:

$$(5.5) \quad J_\varepsilon(v) = \int_\Gamma |y(v) - z_d|^2 d\Gamma + \varepsilon \int_\Gamma v^2 d\Gamma,$$

où z_d est donné dans $L^2(\Gamma)$ et où $\varepsilon > 0$ « petit ».

Soit par ailleurs:

$$(5.6) \quad \mathcal{U}_{ad} = \text{ensemble fermé convexe non vide de } L^2(\Gamma).$$

Le problème de contrôle optimal:

$$(5.7) \quad \inf J_\varepsilon(v), v \in \mathcal{U}_{ad},$$

admet une solution unique, soit u_ε .

Notre objet est maintenant l'étude du comportement de u_ε lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$.

Si l'on pose:

$$y(u_\varepsilon) = y_\varepsilon$$

le contrôle optimal u_ε est caractérisé par:

$$(5.8) \quad \int_\Gamma (y_\varepsilon - z_d)(y(v) - y_\varepsilon) d\Gamma + \varepsilon \int_\Gamma u_\varepsilon (v - u_\varepsilon) d\Gamma \geq 0, \forall v \in \mathcal{U}_{ad}.$$

On pose:

$$(5.9) \quad (y(v) - y(0))_\Gamma = \varphi, (y(u_\varepsilon) - y(0))_\Gamma = \varphi_\varepsilon.$$

Alors v est donné à partir de φ de la façon suivante: on résout

$$(5.10) \quad A\phi = 0 \text{ dans } \Omega, \phi|_\Gamma = -\varphi$$

et l'on pose:

$$(5.11) \quad \mathcal{A}\varphi = \left. \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right|_\Gamma.$$

Alors:

$$(5.12) \quad v = \mathcal{A}\varphi.$$

L'opérateur \mathcal{A} est un *isomorphisme* de $H^s(\Gamma) \rightarrow H^{s-1}(\Gamma)$, $\forall s \in \mathbf{R}$
(Cf. Lions-Magenes [1], Chapitres 1 et 2).

L'opérateur inverse \mathcal{A}^{-1} est donné comme suit: on résout

$$(5.13) \quad Aw = 0, \frac{\partial w}{\partial \nu} = v \text{ sur } \Gamma,$$

et alors:

$$(5.14) \quad w|_\Gamma = \mathcal{A}^{-1}v.$$

On introduit:

$$(5.15) \quad \mathcal{K} = \mathcal{A}^{-1}(\mathcal{U}_{ad}) = \text{ensemble convexe fermé (non vide) de } H^1(\Gamma).$$

Avec ces notations, le problème (5.8) équivaut à :

$$(5.16) \quad \left| \begin{array}{l} \int_{\Gamma} (\varphi_{\varepsilon} - (z_d - y(0))) (\varphi - \varphi_{\varepsilon}) d\Gamma + \varepsilon \int_{\Gamma} \mathcal{A} \varphi_{\varepsilon} \mathcal{A} (\varphi - \varphi_{\varepsilon}) d\Gamma \geq 0, \\ \varphi_{\varepsilon} \in \mathcal{K}, \forall \varphi \in \mathcal{K}. \end{array} \right.$$

Posons :

$$(5.17) \quad g = z_d - y(0).$$

Alors (5.16) équivaut à :

$$(5.18) \quad \varepsilon \int_{\Gamma} \mathcal{A} \varphi_{\varepsilon} \mathcal{A} (\varphi - \varphi_{\varepsilon}) d\Gamma + \int_{\Gamma} \varphi_{\varepsilon} (\varphi - \varphi_{\varepsilon}) d\Gamma \geq \int_{\Gamma} g (\varphi - \varphi_{\varepsilon}) d\Gamma, \forall \varphi \in \mathcal{K}.$$

C'est un problème de perturbations singulières pour des inéquations variationnelles (Cf. D. Huet [1], J. L. Lions [4] [5]). Le résultat est alors le suivant: on introduit

$$(5.19) \quad \bar{\mathcal{K}} = \text{adhérence de } \mathcal{K} \text{ dans } L^2(\Gamma),$$

et soit φ_0 la solution dans $\bar{\mathcal{K}}$ de :

$$(5.20) \quad \int_{\Gamma} \varphi_0 (\varphi - \varphi_0) d\Gamma \geq \int_{\Gamma} g (\varphi - \varphi_0) d\Gamma, \forall \varphi \in \bar{\mathcal{K}},$$

i.e.

$$(5.21) \quad \varphi_0 = \text{Proj.}_{\bar{\mathcal{K}}} g = \text{projection sur } \bar{\mathcal{K}} \text{ dans } L^2(\Gamma) \text{ de } g.$$

On a alors :

$$(5.22) \quad \varphi_{\varepsilon} \rightarrow \varphi_0 \text{ dans } L^2(\Gamma).$$

Par conséquent :

THÉORÈME 5.1. Lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, on a :

$$(5.23) \quad y_{\varepsilon} \Big|_{\Gamma} = y(u_{\varepsilon}) \Big|_{\Gamma} \rightarrow y(0) + \text{Proj.}_{\bar{\mathcal{K}}} (z_d - y(0)) \text{ dans } L^2(\Gamma).$$

On en déduit que :

$$(5.24) \quad u_{\varepsilon} = \mathcal{A} \varphi_{\varepsilon} \rightarrow u_0 = \mathcal{A} \varphi_0 \text{ dans } H^{-1}(\Gamma).$$

En général φ_0 n'est pas dans $H^1(\Gamma)$ de sorte que $\mathcal{A} \varphi_0$ n'est pas dans $L^2(\Gamma)$ de sorte que le résultat (5.24) ne peut pas en général être amélioré.

Remarque 5.1.

Si $\varphi_0 \in H^1(\Gamma)$ (et donc à \mathcal{K}) alors $\varphi_\varepsilon \rightarrow \varphi_0$ dans $H^1(\Gamma)$ et dans ce cas $u_\varepsilon \rightarrow u_0$ dans $L^2(\Gamma)$.

Exemple 5.1.

Prenons le cas « sans contraintes »

$$(5.25) \quad \mathcal{U}_{ad} = L^2(\Gamma).$$

Alors $\mathcal{A}^{-1} \mathcal{U}_{ad} = H^1(\Gamma)$ et $\overline{\mathcal{K}} = L^2(\Gamma)$. Donc $\varphi_0 = z_d - y(o)$ et par conséquent:

$$(5.26) \quad y(u_\varepsilon) \Big|_\Gamma \rightarrow z_d \text{ dans } L^2(\Gamma).$$

Pour obtenir u_0 , on résout:

$$(5.27) \quad A \phi_0 = 0, \phi_0 = z_d \text{ sur } \Gamma$$

et alors:

$$(5.28) \quad u_0 = \frac{\partial \phi_0}{\partial \nu}.$$

Exemple 5.2.

Soit \mathcal{L} une variété régulière de dimension $(n-2)$ contenue dans Γ . Supposons que:

$$(5.29) \quad \mathcal{K} = \{\varphi \mid \varphi \in H^1(\Gamma), \varphi = 0 \text{ sur } \mathcal{L}\}.$$

Alors $\overline{\mathcal{K}} = L^2(\Gamma)$. On a alors:

$$\varphi_\varepsilon \rightarrow g \text{ dans } L^2(\Gamma).$$

Si l'on fait l'hypothèse que $g \in H^1(\Gamma)$, on peut utiliser Lions [4] [5] pour définir des *correcteurs* θ_ε par:

$$(5.30) \quad \left| \begin{array}{l} \theta_\varepsilon + g \in \mathcal{K}, \\ \varepsilon \int_\Gamma \mathcal{A} \theta_\varepsilon \mathcal{A} (\varphi - \theta_\varepsilon) d\Gamma + \int_\Gamma \theta_\varepsilon (\varphi - \theta_\varepsilon) d\Gamma \geq \\ \int_\Gamma (\varepsilon g_{\varepsilon 1} + \varepsilon^{1/2} g_{\varepsilon 2}) (\varphi - \theta_\varepsilon) d\Gamma \\ \forall \varphi \text{ avec } \varphi + g \in \mathcal{K}, \end{array} \right.$$

où

$$\left| \int_{\Gamma} g_{\varepsilon 1} \varphi d\Gamma \right| \leq c \|\varphi\|_{H^1(\Gamma)}, \quad \forall \varphi \in \mathcal{K},$$

$$\left| \int_{\Gamma} g_{\varepsilon 1} \varphi d\Gamma \right| \leq c \|\varphi\|_{L^2(\Gamma)}, \quad \forall \varphi \in \mathcal{K}.$$

On a alors:

$$(5.31) \quad \varphi_{\varepsilon} - (g + \theta_{\varepsilon}) \rightarrow 0 \text{ dans } H^1(\Gamma).$$

Le calcul de θ_{ε} est un calcul de couche limite pour un opérateur pseudo-différentiel (\mathcal{A}). Nous renvoyons pour cela à Demidov [1], Pokrovski [1].

Comme variante on peut prendre:

$$(5.29 \text{ bis}) \quad \mathcal{K} = \{\varphi \mid \varphi \in H^1(\Gamma), \varphi = y(o) \text{ sur } \mathcal{L}\}.$$

Cela signifie que \mathcal{U}_{ad} est l'ensemble des v tels que:

$$(5.32) \quad y(v) = 0 \text{ sur } \mathcal{L}.$$

Donc \mathcal{U}_{ad} est définie à partir des contraintes sur l'état, une situation fréquente dans les applications.

Evidemment, on a encore ici un phénomène de couche limite au voisinage de \mathcal{L} lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$.

Remarque 5.2.

On trouvera dans Lions [4] [5] l'analyse d'autres situations du même type (mais plus délicates).

5.3. Cas d'un système non linéaire

On considère maintenant le système dont l'état est donné par:

$$(5.33) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\Delta y + \beta(y) = 0 \text{ dans } \Omega, \\ \frac{\partial y}{\partial \nu} = v \text{ sur } \Gamma \end{array} \right.$$

où $\lambda \rightarrow \beta(\lambda)$ est une fonction continue strictement croissante de $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, nulle à l'origine. Dans (5.33), on suppose que $v \in L^2(\Gamma)$; le problème (5.33) admet une solution unique telle que:

$$(5.34) \quad y \in H^1(\Omega)$$

et

$$(5.35) \quad \int_{\Omega} y \beta(y) dx < \infty.$$

La fonction coût est encore donnée par:

$$(5.36) \quad J_{\varepsilon}(v) = \int_{\Gamma} |y(v) - z_d|^2 d\Gamma + \varepsilon \int_{\Gamma} v^2 d\Gamma,$$

et \mathcal{U}_{ad} est encore un ensemble fermé convexe non vide de $L^2(\Gamma)$.

On vérifie sans peine qu'il existe $u_{\varepsilon} \in \mathcal{U}_{ad}$ tel que:

$$(5.37) \quad J_{\varepsilon}(u_{\varepsilon}) = \inf J_{\varepsilon}(v), v \in \mathcal{U}_{ad}$$

mais la fonction $v \rightarrow J_{\varepsilon}(v)$ n'ayant pas de raison d'être convexe, il n'y a aucune raison pour que u_{ε} soit unique.

Remarque 5.3.

On pourra trouver dans Lions [2], Chapitre 3, n° 2, des exemples d'équations d'état non linéaires conduisant à des fonctions coût *convexes*.

Remarque 5.4.

Il serait intéressant de pouvoir donner des « estimations topologiques » du *nombre éventuel* de solutions du problème (5.37).

Notre objet est maintenant de faire tendre ε vers 0.

De manière formelle, lorsque $\mathcal{U}_{ad} = L^2(\Gamma)$, on considère le problème de Dirichlet non homogène

$$(5.38) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\Delta\phi_0 + \beta(\phi_0) = 0, \\ \phi_0|_{\Gamma} = z_d \end{array} \right.$$

qui admet une solution unique dans $H^1(\Omega)$ si $z_d \in H^{1/2}(\Gamma)$.

Faisons l'hypothèse (de régularité sur z_d et sur β) que:

$$(5.39) \quad u_0 = \frac{\partial\phi_0}{\partial\nu} \Big|_{\Gamma} \in L^2(\Gamma).$$

On a alors:

(5.40) $\left| \begin{array}{l} u_\varepsilon \text{ étant une solution quelconque de (5.37), } u_\varepsilon \rightarrow u_0 \text{ dans} \\ L^2(\Gamma) \text{ faible.} \end{array} \right.$

En effet, on note que (en posant $|\varphi|^2 = \int_\Gamma \varphi^2 d\Gamma$):

$$\varepsilon |u_\varepsilon|^2 \leq J_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq J_\varepsilon(u_0) = \varepsilon |u_0|^2$$

donc:

$$(5.41) \quad |u_\varepsilon| \leq |u_0|.$$

On peut donc extraire une suite, encore notée u_ε , telle que:

$$(5.42) \quad u_\varepsilon \rightarrow w \text{ dans } L^2(\Gamma) \text{ faible.}$$

On vérifie sans peine que $y(u_\varepsilon) \rightarrow y(w)$ dans $H^1(\Gamma)$ faible et qu'alors:

$$(5.43) \quad J_\varepsilon(u_\varepsilon) \rightarrow J(w) = \int_\Gamma |y(w) - z_d|^2 d\Gamma.$$

Mais:

$$J_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq J_\varepsilon(v) \quad \forall v \in L^2(\Gamma) \text{ donne, avec (5.43):}$$

$$J(w) \leq J(v) \quad \forall v \in L^2(\Gamma)$$

donc $J(w) \leq J(u_0) = 0$ donc $y(w) \Big|_\Gamma = z_d$ donc $y(w) = \phi_0$, donc $w = u_0$, d'où (5.40).

A la lumière des résultats du n° 5.2., on peut conjecturer que sans l'hypothèse de régularité (5.39), u_ε converge vers u_0 dans un espace « plus grand » que $L^2(\Gamma)$.

Ce problème est ouvert; pour un peu en préciser l'énoncé, on est conduit à la question des problèmes « non linéaires non homogènes » qui est abordée au n° suivant.

5.4. Remarques sur certains problèmes elliptiques non linéaires non homogènes

Avec un changement de notations par rapport à (5.38), on étudie le problème suivant: trouver ϕ solution de

$$(5.44) \quad \left| \begin{array}{l} -\Delta\phi + \beta(\phi) = 0, \\ \phi \Big|_\Gamma = g \end{array} \right.$$

où g est, *par exemple*, donné dans $L^2(\Gamma)$ (le problème est facile si $g \in H^{1/2}(\Gamma)$).

Il faut évidemment introduire (puisqu'il en est déjà ainsi dans les cas *linéaires* analogues; Cf. Lions-Magenes [1], Chapitre 2) des solutions *faibles* de (5.44): on dira que ϕ est *solution faible* de (5.44) si:

$$(5.45) \quad (\phi, -\Delta\psi) + (\beta(\phi), \psi) = - \int_{\Gamma} g \frac{\partial\psi}{\partial\nu} d\Gamma$$

pour toute fonction ψ « régulière » dans Ω et *nulle sur* Γ (on a posé $(\phi, \psi) = \int_{\Omega} \phi \psi dx$).

Cela posé, on a le résultat suivant, dû à H. Brezis [1].

THÉORÈME 5.2. *Soit* $\delta(x) =$ *distance de* x *à* Γ . *Si* g *est donné dans* $L^1(\Gamma)$ *le problème (5.45) admet une solution unique telle que :*

$$(5.46) \quad \phi \in L^1(\Omega),$$

$$(5.47) \quad \delta \beta(\phi) \in L^1(\Omega),$$

et où dans (5.45) on peut prendre $\psi \in H^{2,\infty}(\Omega) \cap H_{0}^{1,\infty}(\Omega)$.

En outre l'application $g \rightarrow \phi = \phi(g)$ *est Lipschitzienne, au sens suivant :*

Si $g_i \in L^1(\Gamma)$ *et si* $\phi(g_i) = \phi_i$, *on a :*

$$(5.48) \quad \left| \begin{array}{l} \|\phi_1 - \phi_2\|_{L^1(\Omega)} + \|\delta\beta(\phi_1) - \delta\beta(\phi_2)\|_{L^1(\Omega)} \\ \leq c \|g_1 - g_2\|_{L^1(\Gamma)}. \end{array} \right.$$

On va maintenant appliquer *la théorie de l'interpolation non linéaire* (Cf. Lions [6], J. Peetre [1]).

On vérifie sans peine que:

$$(5.49) \quad \|\phi\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|g\|_{L^\infty(\Gamma)}.$$

L'application $g \rightarrow \phi = \phi(g)$ vérifie donc (5.49) et

$$(5.50) \quad \|\phi(g_1) - \phi(g_2)\|_{L^1(\Omega)} \leq c \|g_1 - g_2\|_{L^1(\Gamma)}.$$

On peut alors *interpoler* entre ces estimations (Cf. Lions [6]) et l'on en déduit le

1) I.e. $\psi, \frac{\partial\psi}{\partial x_i}, \frac{\partial^2\psi}{\partial x_i \partial x_j} \in L^\infty(\Omega)$, $\psi = 0$ sur Γ .

THÉOREME 5.3. Pour $g \in L^p(\Gamma)$, $1 \leq p \leq \infty$, le problème (5.45) admet une solution $\phi(g)$ unique dans $L^p(\Omega)$.

On a en outre :

$$(5.51) \quad \|\phi(g)\|_{L^p(\Omega)} \leq c \|g\|_{L^p(\Gamma)}.$$

Remarque 5.5.

On peut en outre montrer que dans les conditions du Théorème précédent :

$$(5.52) \quad \delta^{1/p} \beta(\phi) \in L^p(\Omega).$$

Remarque 5.6.

Si en particulier $g \in L^2(\Gamma)$, alors la solution faible de (5.44) vérifie : $\phi \in L^2(\Omega)$, $\delta^{1/2} \beta(\phi) \in L^2(\Omega)$ (donc $\delta^{1/2} \Delta \phi \in L^2(\Omega)$).

Il ne semble pas que l'on puisse définir $\frac{\partial \phi}{\partial \nu}$ dans ces conditions. Mais

si $g \in L^p(\Gamma)$, $p > 2$, alors on peut définir $\frac{\partial \phi}{\partial \nu}$ dans un espace de distributions sur Γ , par adaptation des méthodes de Lions-Magenes [1].

Pour d'autres résultats et d'autres applications de l'interpolation non linéaire, cf. L. Tartar [2].

6. PROBLÈMES DE GESTION OPTIMALE ET INÉQUATIONS VARIATIONNELLES

6.1. Un problème de gestion optimale ¹⁾

Soit s l'instant initial, $s \in [0, T]$ et soit x le stock de produits à l'instant s .

On se donne un processus de Wiener $f(t)$ ($f(0) = 0$) qui représente la demande cumulée jusqu'à l'instant t ; si l'on pose :

$$(6.1) \quad E f(t) = \mu(t)$$

on a :

$$(6.2) \quad E(f(t) - \mu(t)(f(s) - \mu(s))) = \int_0^{\min(t,s)} \sigma^2(\tau) d\tau.$$

¹⁾ Les résultats des n° 6.1 et 6.2 sont dus à Bensoussan et l'auteur [2] [3] et à Bensoussan, Goursat et l'auteur [1]; nous renvoyons aux articles détaillés des ces auteurs pour les (longs) détails techniques.

On se donne des temps d'arrêts en nombre fini mais quelconques, avec:

$$(6.3) \quad 0 \leq \tau_1 \leq \tau_2 \leq \dots \leq \tau_i \leq \tau_N \leq T \quad \text{p.s.}$$

et des v.a. $w_1 \dots w_i \dots w_N$ avec w_i adaptée à $f(t)$, $t \in [0, \tau_i]$.

La suite (finie) τ_i, w_i est la variable de contrôle (stochastique).

L'état $y(t)$ du système est donné par:

$$(6.4) \quad y(t) = x - (f(t) - f(s)) + \sum_{j=1}^i w_j, \quad \tau_i \leq t < \tau_{i+1}.$$

Soit $t \rightarrow N(t)$ une fonction de $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, de classe C^1 , > 0 , telle que $N(\tau)$ désigne le coût d'une commande de produits à l'instant τ .

La fonction coût du problème est alors:

$$(6.5) \quad J_s^x((\tau_i, w_i)) = E \left[\sum_i N(\tau_i) + \int_s^T l(y(t)) dt \right]$$

où

$$(6.6) \quad \left\{ \begin{array}{l} l(\lambda) \geq 0, \lambda \rightarrow l(\lambda) \text{ continue}, l(0) = 0, \\ l \text{ étant décroissante si } \lambda \leq 0, \text{ croissante si } \lambda \geq 0. \end{array} \right.$$

Pour fixer les idées:

$$(6.7) \quad l(\lambda) = c_1 \lambda^- + c_2 \lambda^+, \quad c_2 > 0, \quad c_1 \geq 0.$$

On pose:

$$(6.8) \quad w(x, s) = \inf_{(\tau_i, w_i)} J_s^x((\tau_i, w_i));$$

notre objet essentiel est d'obtenir une *caractérisation fonctionnelle* de w (fonction définie sur $\mathbf{R}_x \times]0, T[$).

Nous renvoyons à Bensoussan et Lions [2] pour la vérification du résultat suivant:

$$(6.9) \quad w(x, t) \leq N(t) + \inf_{\xi \geq 0} w(x + \xi, t), \quad \forall x \in \mathbf{R}, t \in]0, T[$$

$$(6.10) \quad -\frac{\partial w}{\partial t} - \frac{1}{2} \sigma^2(t) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu(t) \frac{\partial w}{\partial x} \leq l(x), \quad x \in \mathbf{R}, t \in]0, T[$$

$$(6.11) \quad w(x, t) = N(t) + \inf_{\xi \geq 0} w(x + \xi, t) \quad \text{pour } x \leq \Sigma_1(t),$$

$$(6.12) \quad -\frac{\partial w}{\partial t} - \frac{1}{2} \sigma^2(t) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + m(t) \frac{\partial w}{\partial x} = l(x) \quad \text{pour } x > \Sigma_1(t),$$

$$(6.13) \quad w(x, T) = 0.$$

Nous allons maintenant montrer comment les égalités et inégalités (6.9) ... (6.13), caractérisent la fonction w (pourvu d'ajouter des conditions de croissance à l'infini en x sur w). L'*unicité* résulte des raisonnements probabilistes conduisant aux inégalités précédentes. On donne seulement dans la suite des indications sur l'*existence* d'une solution.

6.2. Réduction à une inéquation quasi variationnelle d'évolution

On introduit:

$$(6.14) \quad u = \frac{w}{N(t)}.$$

Les conditions (6.9) ... (6.13) deviennent:

$$(6.15) \quad u(x, t) \leq 1 + \inf_{\xi \geq 1} u(x + \xi, t)$$

$$(6.16) \quad -\frac{\partial u}{\partial t} + A(t)u \leq f(x, t), \quad f(x, t) = \frac{l(x)}{N(t)},$$

$$(6.17) \quad u(x, t) = 1 + \inf_{\xi \geq 1} u(x + \xi, t), \quad x \leq \Sigma_1(t),$$

$$(6.18) \quad -\frac{\partial u}{\partial t} + A(t)u = f \quad \text{pour } x > \Sigma_1(t),$$

$$(6.19) \quad u(x, T) = 0,$$

où $A(t)$ est défini par:

$$(6.20) \quad A(t)\varphi = -\frac{1}{2}\sigma^2(t)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \mu(t)\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{N'(t)}{N(t)}\varphi.$$

On va maintenant transformer (6.15) ... (6.19) en une inéquation quasi variationnelle.

Remarque 6.1.

La transformation simple (6.14) a pour *seul* but de transformer (6.9) en (6.15). La condition (6.9) conduit à introduire l'ensemble des fonctions φ sur \mathbf{R} , à croissance convenable à l'infini, et telles que:

$$(6.21) \quad \varphi(x) \leq N(t) + \inf_{\xi \geq 0} \varphi(x + \xi),$$

ensemble qui dépend de t ; sous la forme (6.15), cela revient à prendre $N(t) = 1$ dans (6.21) et l'ensemble correspondant ne dépend plus de t ; cette simplification est techniquement utile.

On va utiliser des espaces fonctionnels hilbertiens contenant des poids choisis de manière que $l(x)$ appartienne à ces espaces.

Pour $\lambda > 0$ ¹⁾, on pose:

$$(6.22) \quad m_\lambda(x) = \exp(-\lambda |x|)$$

et l'on introduit:

$$(6.23) \quad H_\lambda = \{\varphi \mid m_\lambda \varphi \in L^2(\mathbf{R})\},$$

$$(6.24) \quad V_\lambda = \{\varphi \mid \varphi \in H_\lambda, \frac{d\varphi}{dx} \in H_\lambda\};$$

l'espace H_λ est un Hilbert pour la norme $\|m_\lambda \varphi\| = \|\varphi\|_\lambda$ (où $\|m_\lambda \varphi\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} m_\lambda^2(x) \varphi(x)^2 dx$) et V_λ est un Hilbert pour la norme:

$$(6.25) \quad \|\varphi\|_\lambda = \left(\|\varphi\|_\lambda^2 + \left\| \frac{d\varphi}{dx} \right\|_\lambda^2 \right)^{1/2}.$$

Pour $u, v \in V_\lambda$, on pose:

$$(6.26) \quad \left| \begin{aligned} b_\lambda(t; u, v) &= \frac{1}{2} \sigma^2(t) \int_{\mathbf{R}} m_\lambda^2 \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} dx - \lambda \sigma^2(t) \int_{\mathbf{R}} m_\lambda^2 \frac{x}{|x|} \left(\frac{du}{dx} \right) v dx \\ &+ \mu(t) \int_{\mathbf{R}} m_\lambda^2 \left(\frac{du}{dx} \right) v dx - \frac{N'(t)}{N(t)} \int_{\mathbf{R}} m_\lambda^2 u v dx. \end{aligned} \right.$$

On vérifie que $u, v \rightarrow b_\lambda(t; u, v)$ est une forme bilinéaire continue sur V_λ et on a fait ce qu'il fallait pour avoir:

$$(6.27) \quad b_\lambda(t; u, v) = \int_{\mathbf{R}} m_\lambda^2 (Au) v dx$$

(si par exemple v est à support compact et u assez régulière).

On introduit:

$$(6.28) \quad \left| \begin{aligned} M(\varphi)(x) &= 1 + \inf_{\xi \geq 0} \varphi(x + \xi), \\ K &= \{\varphi \mid \varphi \in V_\lambda, \varphi(x) \leq M(\varphi)(x)\} \end{aligned} \right.$$

¹⁾ On pourra prendre λ arbitrairement petit.

ce qui définit un ensemble convexe fermé non vide de V_λ .

On considère alors l' « inéquation quasi variationnelle d'évolution » suivante : trouver une fonction $t \rightarrow u(t)$ de $[0, T] \rightarrow V_\lambda$, telle que :

$$(6.29) \quad u(t) \in K \text{ p.p.,}$$

$$(6.30) \quad - \left(\frac{\partial u}{\partial t}(t), v - u(t) \right)_\lambda + b_\lambda(t; u(t), v - u(t)) \geq (f(t), v - u(t))_\lambda, \quad \forall v \leq M(u)$$

$$(6.31) \quad u(T) = 0.$$

Remarque 6.2.

Il s'agit d'une « quasi inéquation » — l'inéquation variationnelle correspondant au convexe K étant obtenue lorsque dans (6.30) on prend v dans K , i.e. $v \leq M(v)$ (au lieu de $v \leq M(u)$).

On va maintenant donner quelques indications brèves sur la solution de la quasi inéquation précédente. On renvoie à Bensoussan-Goursat-Lions [1] pour la *comparaison* entre la solution de l'inéquation et de la quasi inéquation.

Commençons par le cas *stationnaire*.

On a alors une forme $b_\lambda(u, v)$ coercive sur V_λ et on considère la quasi inéquation :

$$(6.32) \quad \left| \begin{array}{l} b_\lambda(u, v - u) \geq (f, v - u)_\lambda, \quad \forall v \leq M(u), \\ u \leq M(u), \quad u, v \in V_\lambda. \end{array} \right.$$

On montre l'existence d'une solution $u \geq 0$ lorsque f est donnée ≥ 0 , par le procédé itératif suivant ; on part de u^0 solution de :

$$(6.33) \quad b_\lambda(u^0, v) = (f, v)_\lambda, \quad \forall v \in V_\lambda.$$

puis l'on définit u^1 par la solution de l'inéquation variationnelle :

$$(6.34) \quad \left| \begin{array}{l} b_\lambda(u^1, v - u^1) \geq (f, v - u^1)_\lambda, \quad \forall v \text{ avec } v \leq M(u^0), \\ u^1 \leq M(u^0) \end{array} \right.$$

et l'on définit de proche en proche u^n à partir de u^{n-1} par la solution de l'inéquation variationnelle :

$$(6.35) \quad \left| \begin{array}{l} b_\lambda(u^n, v - u^n) \geq (f, v - u^n)_\lambda, \quad \forall v \leq M(u^{n-1}), \\ u^n \leq M(u^{n-1}). \end{array} \right.$$

On démontre que:

$$(6.36) \quad u^0 \geq u^1 \geq \dots \geq u^{n-1} \geq u^n \geq \dots \geq 0$$

et que u^n demeure dans un borné de V_λ . Donc:

$u^n \rightarrow u$ dans V_λ faible, u satisfait à (6.32) et u est ≥ 0 .

Dans le cas d'évolution on introduit (Cf. Bensoussan-Lions [3]) les *solutions faibles* de la quasi inéquation, de la même façon que la solution faible des inéquations. On considère la classe de fonctions:

$$(6.37) \quad \mathcal{V} = \left\{ v \mid v, \frac{\partial v}{\partial t} \in L^2(0, T; V_\lambda), v(T) = 0 \right\}.$$

Supposons que u soit solution de (6.29) (6.30) (6.31) et calculons la quantité:

$$(6.38) \quad \left| \begin{array}{l} X = \int_0^T \left[- \left(\frac{\partial v}{\partial t}, v - u \right)_\lambda + b_\lambda(t; u, v - u) - (f, v - u)_\lambda \right] dt, \\ v \in \mathcal{V}, v \leq M(u). \end{array} \right.$$

On a:

$$(6.39) \quad \left| \begin{array}{l} X = \int_0^T \left[- \left(\frac{\partial u}{\partial t}, v - u \right)_\lambda + b_\lambda(t; u, v - u) - (f, v - u)_\lambda \right] dt + Y, \\ Y = \int_0^T \left(- \frac{\partial}{\partial t} (v - u), v - u \right)_\lambda dt = \frac{1}{2} \left| v(0) - u(0) \right|_\lambda^2 \geq 0. \end{array} \right.$$

D'après (6.30) le premier terme du deuxième membre de (6.39) est ≥ 0 , et par conséquent $X \geq 0$.

On définit alors une solution faible du problème (6.29) (6.30) (6.31) comme étant une fonction u telle que:

$$(6.40) \quad u \in L^2(0, T; V_\lambda), u \leq M(u),$$

$$(6.41) \quad \int_0^T \left[- \left(\frac{\partial v}{\partial t}, v-u \right)_\lambda + b_\lambda(t; u, v-u) - (f, v-u)_\lambda \right] dt \geq 0$$

$$\forall v \in \mathcal{V}, \text{ tel que } v \leq M(u).$$

On montre encore (cf. Bensoussan, Lions [3]) l'existence d'une solution $u \geq 0$ de (6.40) (6.41) lorsque f est donnée ≥ 0 .

Le principe d'une démonstration est d'utiliser un processus d'itération analogue à (6.35) mais où l'on doit alors régulariser M de façon convenable (pour que l'inéquation variationnelle correspondante admette une solution forte). Une autre démonstration repose sur la méthode des différences finies.

Remarque 6.3.

Naturellement on rencontre les problèmes analogues en dimension quelconque d'espace — la dimension de l'espace correspondant au nombre de biens à gérer. On rencontre aussi de nombreuses autres fonctionnelles M correspondant à diverses situations économiques. Nous renvoyons à Bensoussan, Lions [2]; on trouvera dans M. Goursat [1] l'étude de l'approximation numérique de la solution de ces inéquations quasi variationnelles.

Remarque 6.4.

Les inéquations variationnelles, stationnaires ou d'évolution, interviennent dans de nombreux problèmes de Physique et de Mécanique (cf. Duvaut, Lions [1] et la bibliographie de ce livre, C. Baiocchi et E. Magenes [1], H. Brezis et G. Duvaut [1], H. Brezis et G. Stampacchia [1]).

6.3. *Problèmes de temps d'arrêt optimal*

On a montré dans Bensoussan-Lions [1] comment des problèmes de temps d'arrêt optimal se ramènent à l'étude d'inéquations variationnelles du type suivant:

$$(6.42) \quad - \left(\frac{\partial v}{\partial t}, v-u \right)_\lambda + b_\lambda(t; u, v-u) \geq (f, v-u)_\lambda, \forall v \in K_1$$

où

$$(6.43) \quad K_1 = \{v \mid v \leq 0 \text{ p.p.}, v \in V_\lambda\},$$

avec :

$$(6.44) \quad u(t) \in K_1$$

et une condition de croissance pour $\|u(t)\|_\lambda$ lorsque $t \rightarrow +\infty$ ($\|u(t)\|_\lambda$ doit croître moins vite qu'une exponentielle convenable).

On a montré que ce problème admet une solution unique.

Remarque 6.5.

Pour un problème analogue en théorie des jeux, nous renvoyons à A. Friedman [1]. Pour des résultats supplémentaires de régularité, cf. A. Friedman [2].

BIBLIOGRAPHIE

- BAIOCCHI, C. et E. MAGENES. [1] Problemi di frontiera libera in idraulica. *Colloque in Metodi valutativi nella fisica matematica. Accad. Naz. Lincei* (1972).
- BALAKRISHNAN, A. V. et J. L. LIONS. [1] State information for infinite dimensional systems. *Computation and System Sciences, 1* (1967), 391-403.
- BARANGER, J. [1] Existence de solutions pour des problèmes d'optimisation non convexe. *J. Math. P. et Appl.* (1973).
- BENSOUSSAN, A. [1] *Filtrage optimal des systèmes linéaires*. Paris Dunod, (1971).
- [2] On the separation principle for distributed parameter systems. *Banff*. (June 1971).
- BENSOUSSAN, A., M. GOURSAT et J. L. LIONS. [1] *Note C. R. Acad. Sc. Paris*, Mai 1973.
- BENSOUSSAN, A. et J. L. LIONS. [1] Problèmes de temps d'arrêt optimal et inéquations variationnelles paraboliques. *Applicable Analysis* (1973). *A paraître*.
- [2] *Note C.R. Acad. Sc. Paris*, Mai 1973.
- [3] *Note C.R. Acad. Sc. Paris*, Juin 1973.
- BENSOUSSAN, A. et R. TEMAN. [1] Equations aux dérivées partielles stochastiques non linéaires (1). *Israel J. of Math.* 11 (1972), 95-130.
- BERKOWITZ, L. D. [1] *A paraître*.
- BIDAUT, M. F. [1] Thèse, Paris (1973).
- BISMUT, J. M. [1] Thèse, Paris (1973).
- BRAUNER, C. M. et P. PENEL. [1] *Sur le contrôle optimal de systèmes non linéaires de biomathématiques*. Thèse 3^e cycle, Paris (1972).
- BREZIS, H. [1] *A paraître*.
- [2] Problèmes unilatéraux. *J. Math. P. et Appl.* 51 (1972), 1-168.
- BREZIS, H. et G. DUVAUT. [1] *C. R. Acad. Sc. Paris* (1973).
- BREZIS, H. et G. STAMPACCHIA. [1] *C. R. Acad. Sc. Paris* (1973).

- BUTKOWSKI, A. G. [1] Theory of optimal Control of Distributed parameter Systems. *Am. Elsevier* (1969) (Trad. de l'Édition Russe, Moscou, 1965).
- CESARI, L. [1] Multi dimensional Lagrange problems of optimization in a fixed domain and an application to a problem of magneto-hydrodynamics. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 29(2) (1968), 81-104.
- PRATO, G. DA. [1] Equation d'évolution dans des algèbres d'opérateurs et applications. *J. Math. P. et Appl.*, 48 (1969), 59-107.
- DEMIDOV, A. S. [1] Sur l'effet de peau et le comportement asymptotique de certains opérateurs elliptiques pseudo-différentiels. *Ouspetchi Mat. Nauk.* 27 (1972), 245-246.
- DUFF, G. F. [1] Tidal resonance and tidal burners in the bay of Fundy system. *J. Fish. Res. Bd. Canada*, 27 (1970), 1701-1728.
- DUVAUT, G. et J. L. LIONS. [1] *Sur les inéquations en Mécanique et en Physique*. Dunod, Paris (1972).
- EDELSTEIN, W. [1] On nearest points of sets in uniformly convex Banach spaces. *J. of London Math. Soc.*, 43 (1968), 375-377.
- EGOROV, Yu. B. [1] Conditions suffisantes pour le contrôle optimal dans des espaces de Banach *Mat. Sbornik* 64 (1964), 79-101.
- [2] *A paraître*.
- EKELAND, I. [1] Sur le contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations elliptiques. *J. Funct. Anal.* 9(1) (1972).
- EKELAND, I. et R. TEMAM. [1] *Analyse convexe et problèmes variationnels* — Dunod, Paris (1973).
- FRIEDMAN, A. [1] Stochastic games and variational inequalities. *Archive for Rat. Mech. and Analysis* (1973).
- [2] Regularity theorems. *Archive for Rat. Mech. and Analysis* (1973).
- GAMKRELIDZE, R. V. [1] On some extremal problems in the theory of differential equations with applications to the theory of optimal control. *Siam J. Control*, 3 (1965), 106-128.
- GLOWINSKI, R., J. L. LIONS et R. TREMOLIÈRES. [1] *Sur le calcul numérique des solutions des inéquations variationnelles de la Mécanique et de la Physique*. Dunod, Paris (1974).
- GOURSAT, M. [1] *A paraître*.
- HUET, D. [1] Perturbations singulières d'inégalités variationnelles. *C. R. Acad. Sc. Paris*, 267, (1968), 932-934.
- KERNEVEZ, J. P. [1] Thèse, Paris (1972).
- [2] *A paraître*.
- KERNEVEZ, J. P. et THOMAS. [1] Livre en préparation.
- J. L. LIONS. [1] *Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles*. Dunod, Gauthier Villars, Paris (1968).
- [2] *Some aspects of the optimal control of distributed parameter systems*. Regional Conf. Series in Applied Math., SIAM, Vol. 6 (1972).
- [3] Contrôle optimal de systèmes distribués: propriétés de comparaison et perturbations singulières. *Colloque Accad. Naz. Lincei, Rome* (Décembre 1972).
- [4] Singular perturbations and singular layers in variational inequalities. *Symp. on non linear functional analysis. Madison* (1971).
- [5] *Perturbations singulières dans les problèmes aux limites et dans le contrôle optimal*. Lecture Notes N° 323, Springer (1973).
- [6] Some remarks in variational inequalities. *Proc. Int. Conf. on Functional Analysis and Related topics. Tokyo* (1969), 269-282.
- [7] *Quelques méthodes de résolutions des problèmes aux limites non linéaires*. Dunod, Gauthier Villars, Paris (1969).

- [8] Sur les inéquations variationnelles (en russe). *Usspechi Mat. Nauk. (en hommage au Professeur Petrowski) XXVI (158)* (1971), 206-261.
- LIONS, J. L. et E. MAGENES. [1] *Problèmes aux limites non homogènes et applications*. Paris, Dunod, Vol. 1 et 2, (1958), Vol. 3 (1970).
- LIONS, J. L. et G. STAMPACCHIA. [1] Variational inequalities. *Comm. Pure Appl. Math. XX* (1967), 493-519.
- LURE, K. A. [1] Optimal control of conductivity of a fluid moving in a channel in a magnetic field. *P. M. M.* 28 (1964), 258-267.
- MARINO A. et S. SPAGNOLO. [1] Un tipo di approssimazione dell'operatore... *Annali S.N. Sup. Pisa*, 23 (1969), 657-673.
- MURAT, F. [1] Un contre exemple pour le problème du contrôle dans les coefficients. *C. R. Acad. Sc. Paris* 273, (1971), 708-711.
- [2] Théorèmes de non-existence pour des problèmes de contrôle dans les coefficients. *C. R. Acad. Sc. Paris* 274, (1972), 395-398.
- MURAT, F. et L. TARTAR. [1] *A paraître*.
- PARDOUX, E. [1] Non linear stochastic partial differential equations. *A paraître*.
- PEETRE, J. [1] Interpolation of Lipschitz operators and metric spaces. *Matematika (Cluj)*.
- POKROVSKI, L. L. [1] Problème de Dirichlet pour les opérateurs pseudo-différentiels elliptiques, dépendant d'un paramètre. *Doklady Akad. Nauk*, 188 (1969), 528-531.
- PONTRYAGIN, L. S., V. G. BOLTYANSKII, R. V. GAMKRELIDZE et E. F. MISHENKO. [1] *The mathematical theory of optimal processes*. Interscience, 1962.
- RUSSEL, D. L. [1] Control theory of hyperbolic equations related to certain questions in harmonic analysis and spectral theory. *J. Math. Anal. Appl.* 40 (1972), 336-368.
- SCHWARTZ, L. [1] Théorie des noyaux. *Proc. Intern. Congress of Math. I* (1950), 220-230.
- SOBOLEV, S. L. [1] *Application of functional analysis to Mathematical Physics*. Leningrad (1950).
- SPAGNOLO, S. [1] Sul limite delle soluzioni di problemi di Cauchy relativi all'equazione del calore. *Annali S.N. Sup. Pisa*, 21 (1967), 657-699.
- [2] Sulla convergenza di soluzioni di equazioni paraboliche ed ellittiche. *Annali S.N. Sup. Pisa*, 22 (1968), 571-597.
- TARTAR, L. [1] *A paraître*.
- [2] Interpolation non linéaire. *J. Funct. Analysis* (1972).
- TEMAM, R. [1] Sur l'équation de Riccati associée à des opérateurs non bornés en dimension infinie. *J. Funct. Analysis* 7 (1971), 85-115.
- VACILIEV, F. R. [1] Sur l'existence de la solution d'un problème de Stefan optimal. *Méthodes Maths en Programmation. t. XII, Moscou* (1972), 110-114.
- WANG, P. K. C. [1] Control of distributed parameter systems. *Advances in Control Systems, ed. par C. T. Leondes, Acad. press I* (1964), 75-172.
- YVON, J. P. [1] Thèse, Paris (1973).

(Reçu le 26 février 1973)

J. L. Lions
Université de Paris VI
Tour 55-5E
9, quai Saint-Bernard
F-75-Paris 5^e