

<b>Zeitschrift:</b>	L'Enseignement Mathématique
<b>Herausgeber:</b>	Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
<b>Band:</b>	19 (1973)
<b>Heft:</b>	1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE
 <b>Artikel:</b>	 ÉQUATIONS ET VARIÉTÉS ALGÉBRIQUES SUR UN CORPS FINI
<b>Autor:</b>	Joly, Jean-René
<b>Kapitel:</b>	§5. Calcul explicite de certaines fonctions zêta.
<b>DOI:</b>	<a href="https://doi.org/10.5169/seals-46287">https://doi.org/10.5169/seals-46287</a>

### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 18.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

et  $V$ , et non du procédé, cohomologique ou autre, utilisé pour établir la formule (4.1.1).

## § 5. Calcul explicite de certaines fonctions zêta.

**5.1.** Ce dernier paragraphe donne, à titre d'illustration de ce qui précède, le calcul explicite des fonctions zêta de certaines variétés algébriques (courbes ou hypersurfaces) définies par des équations diagonales. On utilise essentiellement les résultats du chapitre 5, du chapitre 6 (§ 3), et le théorème suivant, dû à Davenport et Hasse (1934), qui permet de comparer les sommes de Gauss relatives à  $k$  et celles relatives à  $k_m$  ( $m \geq 1$ ):

**THÉORÈME 4 (Davenport-Hasse).** — *Soient  $\beta$  et  $\chi$  un caractère additif et un caractère multiplicatif non triviaux de  $k$ ; pour  $m \geq 1$ , soient d'autre part  $T^{(m)}$  et  $N^{(m)}$  la trace et la norme dans l'extension  $k_m/k$ , et posons  $\beta^{(m)} = \beta \circ T^{(m)}$ ,  $\chi^{(m)} = \chi \circ N^{(m)}$ . Alors*

- (i)  *$\beta^{(m)}$  est un caractère additif non trivial de  $k_m$ ;  $\chi^{(m)}$  est un caractère multiplicatif non trivial de  $k_m$ , et  $\chi^{(m)}$  a même ordre que  $\chi$ .*
- (ii) *Si on désigne par  $\tau$  et  $\tau^{(m)}$  les sommes de Gauss  $\tau(\chi | \beta)$  et  $\tau(\chi^{(m)} | \beta^{(m)})$  relatives à  $k$  et  $k_m$  respectivement, on a*

$$(5.1.1) \quad \tau^{(m)} = (-1)^{m-1} \tau^m.$$

Démonstration. — (i) Il suffit de noter que  $T^{(m)}: k_m^+ \rightarrow k^+$ , et  $N^{(m)}: k_m^* \rightarrow k^*$ , sont des homomorphismes surjectifs (chap. 1, prop. 9 et 10).

(ii) (D'après Weil (1949), pp. 503-505). Pour tout polynôme unitaire  $P(U) = U^h + a_1 U^{h-1} + \dots + a_h$  appartenant à  $k[U]$  (resp. à  $k_m[U]$ ), posons  $\varphi(P) = \beta(a_1) \chi(a_h)$  (resp.  $\varphi^{(m)}(P) = \beta^{(m)}(a_1) \chi^{(m)}(a_h)$ );  $\varphi$  et  $\varphi^{(m)}$  sont évidemment des caractères multiplicatifs sur les anneaux principaux  $k[U]$  et  $k_m[U]$ , et on peut leur associer, « à la Dirichlet », les « séries L » suivantes:

$$L(t) = \sum_{\substack{P \\ \text{unit.}}} \varphi(P) t^{\deg(P)} = \prod_{\substack{P \text{ unit.} \\ \text{irréd.}}} 1/(1 - \varphi(P) t^{\deg(P)}),$$

$$L_m(t) = \sum_{\substack{P \\ \text{unit.}}} \varphi^{(m)}(P) t^{\deg(P)} = \prod_{\substack{P \text{ unit.} \\ \text{irréd.}}} 1/(1 - \varphi^{(m)}(P) t^{\deg(P)}),$$

( $P$  étant supposé appartenir à  $k[U]$  et  $k_m[U]$  respectivement, bien entendu.)

LEMME 1. — On a  $L(t) = 1 + \tau t$ ,  $L_m(t) = 1 + \tau^{(m)} t$ .

Vérifions par exemple la première égalité. On a  $L(t) = 1 + c_1 t + \dots + c_h t^h + \dots$ , avec  $c_h = \sum \varphi(P)$ , cette somme étant étendue à tous les  $P \in k[U]$  unitaires et de degré  $h$ , donc de la forme  $U^h + a_1 U^{h-1} + \dots + a_n$ , les  $a_i \in k$ ; pour  $h = 1$ , on trouve ainsi  $c_1 = \sum_{a_1 \in k} \beta(a_1) \chi(a_1) = \tau$  (noter que  $\bar{\chi}(0) = 0$ ); pour  $h \geq 2$  au contraire, on trouve

$$c_h = q^{h-2} \left( \sum_{a_1 \in k} \beta(a_1) \right) \left( \sum_{a_h \in k} \chi(a_h) \right),$$

donc  $c_h = 0$ , chacune des deux sommes étant nulle (chap. 5, prop. 2 et 5).

LEMME 2. — Si  $\omega$  désigne une racine primitive  $m$ -ième de l'unité dans  $\mathbf{C}$ , on a

$$(5.1.2) \quad L_m(t^m) = \prod_{j=0}^{m-1} L(\omega^j t).$$

Pour chaque  $P \in k[U]$ , irréductible et unitaire, considérons le produit fini

$$L_{m,P}(t^m) = \prod_Q 1/(1 - \varphi^{(m)}(Q) t^m),$$

$Q$  parcourant seulement l'ensemble des facteurs irréductibles et unitaires de  $P$  dans  $k_m[U]$ ; on a évidemment

$$(5.1.3) \quad L_m(t^m) = \prod_{\substack{P \text{ unit.} \\ \text{irréd.}}} L_{m,P}(t^m).$$

Transformons maintenant  $L_{m,P}(t^m)$ ,  $P$  étant supposé fixé. Posons  $h = \deg(P)$ , et soit  $\xi$  une racine de  $P$  dans  $k$ ; on a  $[k(\xi):k] = h$ , et bien entendu  $[k_m:k] = m$ ; si alors  $d = (h, m)$ , le p.p.c.m. de  $h$  et  $m$  est égal à  $hm/d$ , et on a (chap. 1, prop. 4, cor. 1)  $[k_m(\xi):k] = hm/d$ , donc  $[k_m(\xi):k_m] = h/d$ . Il en résulte que la décomposition de  $P$  en facteurs irréductibles et unitaires de  $P$  dans  $k_m[U]$  est de la forme

$$\begin{array}{ccc} m/d & \overline{k_m(\xi)} & P = Q_1 Q_2 \dots Q_d, \\ \overline{k(\xi)} & |r & \text{chacun des facteurs } Q_i \text{ étant de degré } r \\ h & \overline{m} & = h/d. \text{ Soit alors } Q \text{ celui des } Q_i \text{ dont } \xi \text{ est} \\ & & \text{racine, et calculons } \varphi^{(m)}(Q). \text{ Notons } a_1 \text{ et } a_n \\ & & \text{la trace et la norme de } -\xi \text{ dans l'extension} \\ & & k(\xi)/k, \text{ et } b_1 \text{ et } b_r \text{ la trace et la norme de} \\ & & -\xi \text{ dans l'extension } k_m(\xi)/k_m; \text{ on a } P(U) \\ & & = U^h + a_1 U^{h-1} + \dots + a_h \text{ et } Q(U) = U^r \\ & & + b_1 U^{r-1} + \dots + b_r, \text{ et par conséquent} \end{array}$$

$$(5.1.4) \quad \varphi(P) = \beta(a_1) \chi(a_h), \quad \varphi^{(m)}(Q) = \beta^{(m)}(b_1) \chi^{(m)}(b_r).$$

L'utilisation de la transitivité de la trace et de la norme dans le diagramme de corps ci-dessus donne d'autre part

$$(5.1.5) \quad T^{(m)}(b_1) = (m/d)a_1, \quad N^{(m)}(b_r) = a_h^{m/d}.$$

(5.1.4), (5.1.5) et la définition de  $\varphi^{(m)}$  permettent alors d'écrire

$$(5.1.6) \quad \varphi^{(m)}(Q) = \beta((m/d)a_1) \chi(a_h^{m/d}) = \varphi(P)^{m/d}.$$

Les  $d$  facteurs irréductibles  $Q_i$  de  $P$  dans  $k_m[U]$  donnent donc la même valeur à  $\varphi^{(m)}$ , d'où

$$(5.1.7) \quad L_{m,P}(t^m) = 1/(1 - \varphi(P)^{m/d} t^{mh/d})^d.$$

Mais, quel que soit  $\alpha \in \mathbf{C}$ , on a

$$(5.1.8) \quad (1 - \alpha^{m/d} t^{mh/d})^d = \prod_{j=0}^{m-1} (1 - \alpha(\omega^j t)^h);$$

les deux membres sont en effet des polynômes unitaires en  $t$ , à coefficients complexes, de même degré  $mh$ , et ayant les mêmes racines (toutes multiples d'ordre  $d$ ). Dans (5.1.8), faisons  $\alpha = \varphi(P)$ , et portons dans (5.1.7); comme  $h = \deg(P)$ , il vient  $L_{m,P}(t^m) = \prod_{j=0}^{m-1} 1/(1 - \varphi(P)(\omega^j t)^{\deg(P)})$ , ce qui, compte tenu de (5.1.3) et de la définition de  $L(t)$ , donne (5.1.2) et prouve le lemme 2.

Démontrons alors le théorème 4. Les lemmes 1 et 2 permettent d'écrire

$$1 + \tau^{(m)} t^m = \prod_{j=0}^{m-1} (1 + \tau \omega^j t);$$

la comparaison des termes de plus haut degré en  $t$  donne donc

$$\tau^{(m)} = \prod_{j=0}^{m-1} \tau \omega^j = \omega^{m(m-1)/2} \tau^m = (-1)^{m-1} \tau^m,$$

C.Q.F.D.

**COROLLAIRE 1.** — Soient  $\chi$  et  $\psi$  deux caractères multiplicatifs non triviaux de  $k$ , et supposons également  $\chi\psi$  non trivial. Alors, si  $\chi^{(m)} = \chi \circ N^{(m)}$  et si  $\psi^{(m)} = \psi \circ N^{(m)}$ , on a

$$(5.1.9) \quad \pi(\chi^{(m)}, \psi^{(m)}) = (-1)^{m-1} \pi(\chi, \psi)^m.$$

**Démonstration.** — Il suffit d'appliquer le théorème 4 et la proposition 9, (ii) du chapitre 5.

**5.2.** Appliquons alors le théorème 4 et son corollaire 1 au calcul des fonctions zêta des courbes de genre 1 étudiées au chapitre 6, sections 3.3 à 3.5 (dont on conserve les notations).

(1) *La courbe  $V_1$  d'équation  $Y^2 = 1 - X^3$  ( $p \neq 2, 3$ ).*

Supposons d'abord  $q \equiv 1 \pmod{6}$ ; la formule (3.3.1) (chap. 6) appliquée au corps de base  $k_m$  donne  $N_{1,m}^{\text{aff}} = q^m + \pi(\varphi^{(m)}, \chi^{(m)}) + \pi(\varphi^{(m)}, \bar{\chi}^{(m)})$   $N_{1,m}^{\text{aff}}$  étant évidemment le nombre de points de  $V_1$  « à distance finie » et rationnels sur  $k_m$ ; posons  $\alpha = -\pi(\varphi, \chi)$ , utilisons le corollaire 1 du théorème 4, et remarquons que  $V_1$  admet exactement un point à l'infini, rationnel sur  $k$ ; il vient alors  $N_{1,m} = q^m + 1 - \alpha^m - \bar{\alpha}^m$ , d'où finalement (th. 2, cor. 1):

$$(5.2.1) \quad Z(V_1; t) = (1 - \alpha t)(1 - \bar{\alpha}t)/(1 - t)(1 - qt),$$

ce qui est évidemment conforme au théorème 3.

Supposons maintenant  $q \equiv -1 \pmod{6}$  (donc  $p \equiv -1 \pmod{6}$  et  $f$  impair). On aura besoin du lemme suivant:

**LEMME 1.** — Soit  $p \equiv -1 \pmod{6}$ , et soient  $\varphi_2$  et  $\chi_2$  deux caractères multiplicatifs de  $K = \mathbf{F}_{p^2}$ , respectivement d'ordre 2 et d'ordre 3 (noter que  $p^2 \equiv 1 \pmod{6}$ ). Alors  $\pi(\varphi_2, \chi_2) = p$ .

**Démonstration.** — Comme  $K$  contient six racines 6-ièmes de l'unité, il est facile de voir que le nombre  $N$  de solutions dans  $K^2$  de l'équation  $Y^2 = 1 - X^3$  satisfait à  $N \equiv 5 \pmod{6}$  (comparer avec le chap. 6, sect. A.1, exemple 2). Posons  $\pi = \pi(\varphi_2, \chi_2)$ ; on a  $N = p^2 + \pi + \bar{\pi}$  (chap. 6, (3.3.1)), et la congruence relative à  $N$  donne

$$(5.2.2) \quad \pi + \bar{\pi} \equiv 4 \pmod{6}.$$

Mais  $\pi, \bar{\pi} \in \mathbf{Z}[\rho]$  ( $\rho = e^{2\pi i/3}$ ),  $\pi\bar{\pi} = p^2$  (chap. 5, prop. 9, cor. 1), et  $p$  est *inerte* dans  $\mathbf{Z}[\rho]$ ; ainsi,  $\pi = \varepsilon p$ ,  $\bar{\pi} = \bar{\varepsilon}p$ ,  $\varepsilon$  étant une racine 6-ième de l'unité. (5.2.2) donne alors  $(\varepsilon + \bar{\varepsilon})p \equiv 4 \pmod{6}$ , puis  $\varepsilon + \bar{\varepsilon} \equiv -4 \equiv 2 \pmod{6}$ , ce qui implique  $\varepsilon = 1$  (examiner les six valeurs possibles de  $\varepsilon$ ). Finalement,  $\pi = \varepsilon p = p$ , C.Q.F.D.

Calculons alors  $N_{1,m}^{\text{aff}}$ . Si  $m$  est impair, on a  $q^m \equiv -1 \pmod{3}$ , donc  $N_{1,m}^{\text{aff}} = q^m$ . Supposons maintenant  $m$  pair,  $m = 2m'$ , et soient  $\varphi$  et  $\chi$  deux caractères multiplicatifs de  $k_2$ , respectivement d'ordre 2 et d'ordre 3; le lemme 1 et le corollaire 1 du théorème 4 (appliqué à  $k_2/\mathbf{F}_{p^2}$ ) donnent d'abord  $\pi(\varphi, \chi) = (-1)^{f-1}p^f = q$ ; le corollaire 1 du théorème 4, appliqué à  $k_m/k_2$ , donne d'autre part  $\pi(\varphi^{(m')}, \chi^{(m')}) = (-1)^{m'-1}q^{m'} = -(-q)^{m'}$ ,

donc (chap. 6, (3.3.1))  $N_{1,m}^{\text{aff}} = q^m - 2(-q)^{m/2}$ . Posons alors  $\alpha = iq^{1/2}$ ; les calculs précédents montrent que, quelle que soit la parité de  $m$ , on a  $N_{1,m}^{\text{aff}} = q^m - \alpha^m - \bar{\alpha}^m$ , donc  $N_{1,m} = q^m + 1 - \alpha^m - \bar{\alpha}^m$ ; finalement, on trouve encore

$$(5.2.3) \quad Z(V_1; t) = (1 - \alpha t)(1 - \bar{\alpha}t)/(1 - t)(1 - qt);$$

compte tenu de la valeur explicite  $\alpha = iq^{1/2}$ , on a même, dans ce cas,

$$(5.2.4) \quad Z(V_1; t) = (1 + qt^2)/(1 - t)(1 - qt).$$

(2) *La courbe  $V_2$  d'équation  $Y^2 = 1 - X^4$  ( $p \neq 2$ ).*

Supposons d'abord  $q \equiv 1 \pmod{4}$ ; la formule (3.3.2) (chap. 6) appliquée au corps de base  $k_m$ , combinée au corollaire 1 du théorème 4, donne, comme en (1),  $N_{2,m}^{\text{aff}} = q^m - 1 - \alpha^m - \bar{\alpha}^m$ , avec  $\alpha = -\pi(\varphi, \psi)$ ; d'autre part,  $V_2$  admet à l'infini un point double rationnel sur  $k$ : comptons-le pour *deux* (ce qui revient à remplacer  $V_2$  par sa normalisée  $V_2^*$ : voir d'ailleurs chap. 8, sect. 2.4); on trouve ainsi  $N_{2,m}^* = q^m + 1 - \alpha^m - \bar{\alpha}^m$ , donc

$$(5.2.5) \quad Z(V_2^*; t) = (1 - \alpha t)(1 - \bar{\alpha}t)/(1 - t)(1 - qt),$$

ce qui est toujours conforme au théorème 3. Remarquer que la fonction zêta de  $V_2$  non normalisée est  $Z(V_2; t) = (1 - \alpha t)(1 - \bar{\alpha}t)/(1 - qt)$ .

Si on suppose au contraire  $q \equiv -1 \pmod{4}$ , un calcul analogue à celui fait en (1) (pour  $q \equiv -1 \pmod{6}$ ) donnerait encore

$$(5.2.6) \quad Z(V_2^*; t) = (1 + qt^2)/(1 - t)(1 - qt).$$

(3) *La courbe  $V_3$  d'équation  $Y^3 = 1 - X^3$  ( $p \neq 3$ ).*

On laisse au lecteur le soin de vérifier que les formules (5.2.5) et (5.2.6) restent valides pour la normalisée  $V_3^*$  de  $V_3$ , respectivement pour  $q \equiv 1 \pmod{3}$  (et avec  $\alpha = -\pi(\chi, \chi)$ : voir chap. 6, (3.3.3)), d'une part; et pour  $q \equiv -1 \pmod{3}$ , d'autre part.

(4) *La courbe  $V_4$  d'équation  $Y^2 = X - X^3$  (pour  $q \equiv 1 \pmod{4}$ ).*

Il résulte des calculs faits au chapitre 6 (sect. 3.4) que

$$(5.2.7) \quad Z(V_4; t) = Z(V_2^*; t).$$

(En fait,  $V_4$  est un modèle projectif non singulier de  $V_2$ , de sorte qu'on peut choisir pour  $V_2^*$  la courbe  $V_4$ .) L'égalité (5.2.7) reste d'ailleurs vraie pour  $q \equiv -1 \pmod{4}$ .

**5.3.** Terminons par deux exemples simples d'hypersurfaces (dans  $\mathbf{P}_3$ ).

(5) *La quadrique d'équation homogène  $X^2 + Y^2 + Z^2 + T^2 = 0$  ( $p \neq 2$ ).*

Le nombre  $N_m^c$  de points rationnels sur  $k_m$  du cône défini dans  $\mathbf{A}_4$  par l'équation ci-dessus est donné (chap. 6, th. 1) par

$$N_m^c = q^{3m} + q^{-m}(q^m - 1)\tau(\varphi^{(m)})^4,$$

$\varphi$  désignant le caractère de Legendre de  $k$ ; mais  $\tau(\varphi^{(m)})^2 = q^m \varphi^{(m)}(-1)$ , et  $(q^m - 1)N_m + 1 = N_m^c$  ( $N_m$  étant le nombre de points de la quadrique rationnels sur  $k_m$ ); d'où immédiatement  $N_m = q^{2m} + 2q^m + 1$ , et (th. 2, cor. 1)

$$(5.3.1) \quad Z(V_5; t) = 1/(1-t)(1-qt)^2(1-q^2t),$$

$V_5$  désignant la quadrique étudiée. (On aurait pu calculer  $N_m^c$  à l'aide des formules du chap. 6, prop. 2). Ce résultat est évidemment conforme à (4.2.1) (sect. 4.2), c'est-à-dire au théorème de Dwork pour les hypersurfaces: on a  $P(t) = 1 - qt$ , de degré 1, et  $(-1)^n = (-1)^3 = -1$ , ce qui « envoie »  $P(t)$  au dénominateur.

(6) *La surface cubique d'équation homogène  $X^3 + Y^3 + Z^3 + T^3 = 0$  ( $p \neq 3$ ).*

On se limitera pour simplifier au cas où  $q \equiv 1 \pmod{3}$ . On pourrait procéder comme en (5), et utiliser le théorème 1 du chapitre 6. Il est plus commode de remarquer que (avec des notations évidentes)  $N_m = N_m^{\text{aff}} + N_m^{\text{inf}}$ ;  $N_m^{\text{aff}}$  est le nombre de solutions rationnelles sur  $k_m$  de l'équation  $X^3 + Y^3 + Z^3 = -1$ ; si  $\chi$  est un caractère multiplicatif d'ordre 3 de  $k$ , le théorème 2 du chapitre 6, la proposition 10 du chapitre 5 et le théorème 4 ci-dessus donnent

$$(5.3.2) \quad N_m^{\text{aff}} = q^{2m} + (-\pi_1)^m + (-\bar{\pi}_1)^m + 3\pi_2^m + 3\pi_2^{-m},$$

avec  $\pi_1 = \pi(\chi, \chi) = -\pi(\chi, \chi, \chi)$  (chap. 5, prop. 10, (i)) et  $\pi_2 = \pi(\chi, \chi, \bar{\chi})$ ; quant à  $N_m^{\text{inf}}$ , c'est le nombre de points rationnels sur  $k_m$  de la cubique d'équation projective  $X^3 + Y^3 + Z^3 = 0$ ; d'où

$$(5.3.3) \quad N_m^{\text{inf}} = q^m + 1 - (-\pi_1)^m - (-\pi_1)^{-m}$$

(chap. 6, (3.3.3); tenir compte des trois points à l'infini !): au total,

$$(5.3.4) \quad N_m = q^{2m} + q^m + 1 + 3\pi_2^m + 3\pi_2^{-m},$$

et (th. 2, cor. 1, une dernière fois)

$$(5.3.5) \quad Z(V_6; t) = 1/(1-t)(1-qt)(1-q^2t)(1-\pi_2t)^3(1-\bar{\pi}_2t)^3,$$

$V_6$  désignant la surface cubique étudiée. Ce résultat est conforme aux conjectures de Weil: on a  $P_0(t) = 1 - t$ ,  $P_1(t) = P_3(t) = 1$ ,  $P_4(t) = 1 - q^2t$ , et  $P_2(t) = (1-qt)(1-\pi_2t)^3(1-\bar{\pi}_2t)^3$ ; l'hypothèse de Riemann se réduit à  $|\pi_2| = |\bar{\pi}_2| = |\pi(\chi, \chi, \bar{\chi})| = q$  (chap. 5, prop. 10, cor. 1, (ii)); la « caractéristique d'Euler-Poincaré » est égale à  $1 + 7 + 1 = 9$ , et l'équation fonctionnelle s'écrit  $Z(V_6; 1/q^2t) = -q^9t^9Z(V_6; t)$ .

### Notes sur le chapitre 9

§ 1-2-3-4: l'idée d'étudier arithmétiquement un corps de fonctions algébriques d'une variable sur un corps fini semble apparaître nettement pour la première fois chez Dedekind (1857). Mais c'est dans la thèse d'Artin (1924), puis dans les travaux de Schmidt (1931) et Hasse (1933, 1934, 1936), qu'est définie la notion de fonction zêta (« Kongruenzzetafunktion ») et formulée l'« hypothèse de Riemann » en caractéristique  $p$  (Artin, Schmidt, Hasse utilisent le langage des corps de fonctions algébriques d'une variable, et non celui des courbes: mais ces deux langages sont équivalents, ou plutôt, le sont devenus depuis les « Foundations » de Weil; voir d'ailleurs Weil (1949), *Introduction*). L'équation fonctionnelle pour  $\zeta(V; s)$  (c'est-à-dire, aux notations près, la proposition 3) est due à Schmidt (1931); la démonstration de l'hypothèse de Riemann pour  $g = 1$  est due à Hasse (1933, 1934), et, pour  $g$  quelconque, à Weil (1940; 1948, a). Les diverses définitions de  $Z(V; t)$  données au paragraphe 1 figurent, pour une courbe, dans Weil (1948, a), et, pour une variété projective non singulière de dimension quelconque, dans Weil (1949); cet article contient également l'énoncé (et, pour des cas particuliers, la vérification) des « conjectures de Weil ». L'existence d'une « formule de Lefschetz » en géométrie algébrique est conjecturée dans Weil (1954) (p. 556): d'où la notion de « cohomologie de Weil » — cette terminologie étant d'ailleurs considérée par Weil lui-même comme « tout à fait inadéquate » (*wholly unsuitable*). Au sujet du lien formel entre théories cohomologiques des variétés algébriques et propriétés des fonctions zêta, voir Demazure (1969), notamment §§ 7 et 9. Au sujet du lien entre méthodes  $p$ -adiques et méthodes cohomologiques, voir Katz (1972) (cet exposé contient une abondante bibliographie).

Signalons qu'à côté des fonctions zêta, on peut (comme en arithmétique) construire, pour les variétés algébriques, des « séries L »; pour une définition générale (en langage des schémas, et englobant d'ailleurs les séries L de la théorie des nombres), voir [16], pp. 86-91. La rationalité des séries L des