Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 19 (1973)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: ÉQUATIONS ET VARIÉTÉS ALGÉBRIQUES SUR UN CORPS FINI
Autor: Joly, Jean-René
Kapitel: Notes sur le chapitre 8
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-46287

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 18.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

$V \subset \mathbf{A}_n$ une variété affine de type (n, d, r); plongeons $\mathbf{A}_n$ dans $\mathbf{P}_n$ de manière que l'hyperplan « à l'infini » H_0 ait pour équation (par exemple) $X_0 = 0$; adjoignons alors à V ses points « à l'infini » de la façon habituelle, et notons W la variété projective ainsi obtenue; elle est de type (n, d, r), et on a, avec des notations évidentes, $N_V = N_W - N_{W.H_0}$; il suffit dans ces conditions d'appliquer le théorème 4 à N_W et le lemme 1 à $N_{W.H_0}$ pour obtenir

$$(4.3.1) \qquad |N_V - q^r| \leqslant B(d)\, q^{r-(1/2)} + A'(n, d, r)\, q^{r-1},$$

avec $A'(n, d, r) = A(n, d, r) + A_1(n, d, r) =$ une constante qui ne dépend que de n, d et r.

Notes sur le chapitre 8

§ **2**: le théorème 2 est dû à Schmidt (1931) (méthode analytique); ce théorème est un aspect d'un résultat général relatif aux espaces homogènes principaux sur un corps de base fini (Lang (1956); voir aussi Serre, *Groupes algébriques et corps de classes*, p. 119 (Hermann, 1959)). L'application $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}^{(q)}$ utilisée dans la démonstration du théorème 2 est souvent dite « endomorphisme de Frobenius » (voir d'ailleurs chap. 1, prop. 8); le fait que les points fixes de cet endomorphisme sont exactement les points rationnels sur $k = \mathbf{F}_q$ est un trait caractéristique de la « géométrie diophantienne » sur un corps fini.

Un certain de nombre de cas particuliers du théorème de Hasse avaient déjà été remarqués au cours du XIXe siècle; citons notamment la « dernière inscription du journal de Gauss » (« letzte Eintragung im Gauss'schen Tagebuch », reproduite dans *Deuring* (1941), pp. 197-198), relative au nombre de solutions de la congruence $X^2Y^2 + X^2 + Y^2 - 1 \equiv 0 \pmod{p}$, pour $p \equiv 1 \pmod 4$ (à ce sujet, voir également [**5**], p. 307, et [**4**], p. 242, note 3). Pour la démonstration originale du théorème de Hasse, voir Hasse (1933, 1934, 1936).

Les courbes (projectives, non singulières) de genre 1 sur un corps fini k ne sont autres (d'après le théorème de Schmidt) que les variétés abéliennes de dimension 1 définies sur k; les variétés abéliennes de dimension quelconque définies sur un corps fini ont été étudiées notamment par Honda, Milne, Serre, Tate, Waterhouse: pour une bibliographie sur ce sujet, voir Waterhouse (1969).

§ **3**: le théorème 3, annoncé par Weil en 1940, est démontré dans Weil (1948) (= [**20**], 1ère partie) par voie « géométrique »: c'est cette démonstration qu'on a résumée ici; pour des démonstrations « arithmétiques »,

voir Igusa (1949) et Roquette (1953) (voir aussi [**5**], chap. V, §§ 1-5); dans tous les cas, le point essentiel est l'inégalité $\sigma(\xi\xi') > 0$ (inégalité (23), p. 292, dans [**5**], par exemple); pour un commentaire sur cette inégalité (dite « de Castelnuovo »), voir Weil (1954), p. 553. Pour une application aux « sommes exponentielles », voir Weil (1948, b).

§ **4**: la constante $A_1(n, d, r)$ (lemme 1) peut être prise égale à $(2d)^r$ (en fait, elle ne dépend donc pas de n); en revanche, la constante $A_2(n, d, r)$ (lemme 2) et par conséquent la constante $A(n, d, r)$ (th. 4) dépendent de n; on ne sait d'ailleurs pas en général les majorer explicitement, faute de renseignements précis sur le degré $e(n, d, r)$ de l'ensemble algébrique E.

Pour d'autres remarques sur les résultats ci-dessus, voir également le chapitre 9.

CHAPITRE 9

FONCTIONS ZÊTA

Dans ce dernier chapitre, on se donne comme toujours un corps fini k à $q = p^f$ éléments, de clôture algébrique $\bar{k}$; pour tout entier $m \geqslant 1$, k_m désigne l'unique extension de degré m de k contenue dans $\bar{k}$ (chap. 1, § 1). A tout ensemble algébrique V défini sur k, on peut alors associer la série formelle $Z(V; t) = \exp\left(\sum_{m \geqq 1} N_m t^m/m\right)$, où N_m désigne le nombre de points de V rationnels sur k_m, et où t est une indéterminée. Il se trouve que cette série formelle est en fait une fraction rationnelle en t, et que, moyennant des hypothèses convenables sur V, cette fraction rationnelle peut être décrite avec précision. Le paragraphe 1 de ce chapitre énonce diverses définitions équivalentes de $Z(V; t)$, et justifie le nom de « fonction zêta de V» qui lui est attribué. Le paragraphe 2 donne une esquisse de la démonstration de la rationalité de $Z(V; t)$. Le paragraphe 3 montre comment le théorème de Riemann-Roch et le théorème 3 du chapitre 8 permettent d'obtenir une description très complète de $Z(V; t)$ quand V est une courbe projective non singulière. Le paragraphe 4 indique sans démonstration diverses généralisations des résultats du paragraphe 3. Enfin, le paragraphe 5 donne des exemples de calcul explicite de fonctions zêta; ce paragraphe peut d'ailleurs être lu directement après le paragraphe 2: on y utilise uniquement les défi-