Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 19 (1973)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: ÉQUATIONS ET VARIÉTÉS ALGÉBRIQUES SUR UN CORPS FINI
Autor: Joly, Jean-René
Kapitel: Notes sur le chapitre 2
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-46287

Théorème 4. — *On a l'égalité*

$$I(V) = J + \Gamma . \tag{3.1.2}$$

Démonstration. — Considérons le polynôme

$$F = 1 - (1-F_1^{q-1}) \dots (1-F_s^{q-1}) ; \tag{3.1.3}$$

F appartient à l'idéal J: en effet, considéré comme polynôme par rapport à $F_1, \dots, F_s$, le second membre de (3.1.3) ne contient pas de terme constant; d'autre part, F prend constamment la valeur 0 sur V, et la valeur 1 en dehors de V (voir chap. 1, sect. 1.1). Soit alors H un élément de $I(V)$, donc un polynôme nul sur V; il est clair que le polynôme $G = H - HF$ est identiquement nul, et appartient donc à Γ; il est clair également, puisque J est un idéal contenant F, que HF appartient à J; on voit ainsi que $H = HF + G$ appartient à $J + \Gamma$, donc que $I(V) \subset J + \Gamma$, C.Q.F.D.

3.2. Le *théorème de la base finie* de Hilbert (voir [**10**], p. 144) montre que tout idéal de $k[X]$ peut être engendré par un nombre fini de polynômes: le théorème 4 est donc en fait applicable à n'importe quel idéal J de $k[X]$ (dans le même ordre d'idées, on peut d'ailleurs remarquer que dans la démonstration du théorème 4, on a implicitement remplacé l'idéal J engendré par $F_1, \dots, F_s$, par l'idéal principal (F), contenu dans J, et dont l'ensemble des zéros dans k^n est le même que celui de J).

Notons d'autre part que le *théorème des zéros* de Hilbert ([**10**], p. 256, [**12**], p. 32, ou [**15**], p. 4) implique que, dans l'anneau $k[X]$, l'idéal $J + \Gamma = I(V)$ est égal à sa racine, c'est-à-dire à l'intersection des idéaux premiers qui le contiennent; comme $\dim(V) = 0$ (V est un ensemble fini de points rationnels sur k), ces idéaux premiers sont d'ailleurs tous maximaux, ce sont exactement les idéaux de la forme $\mathfrak{M}_{\mathbf{a}} = (X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n)$, $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$ parcourant l'ensemble V.

Notes sur le chapitre 2

§ **1** et **2**: les résultats contenus dans ces deux paragraphes sont essentiellement dus à Chevalley (1935); ils donneront notamment (chap. 3, sect. 1.1) une démonstration immédiate du « théorème de Chevalley-Warning ».

§ **3**: le théorème 3 est dû à Terjanian (1966).