Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 18 (1972)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: CLASSIFICATION DES FORMES TRILINÉAIRES ALTERNÉES EN DIMENSION 6

Autor: Capdevielle, Bernadette

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-45374

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 28.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

CLASSIFICATION DES FORMES TRILINÉAIRES ALTERNÉES EN DIMENSION 6

par Bernadette CAPDEVIELLE

INTRODUCTION

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n, sur le corps des réels ou des complexes; l'action du groupe linéaire $Gl(E)$ sur la puissance extérieure $\wedge^p E$ est bien connue dans le cas $p = 1$, $p = 2$ (classification des formes bilinéaires alternées), $p = n-2$, $n-1$, n.

En 1907, W. Reichel [5] a donné une classification des trivecteurs lorsque E est un espace vectoriel complexe de dimension 6 et obtenu certaines trajectoires de $Gl(E)$ dans $\wedge^3 E$, lorsque E est un espace vectoriel complexe de dimension 7. C'est J. A. Schouten [6], qui en 1926 a résolu complètement le problème dans ce cas. Une idée de sa méthode, essentiellement géométrique, sera donnée un peu plus loin. En 1934-1935, G. B. Gurevich [7], [8], [9] a continué la classification, toujours dans le cas où E est un espace vectoriel complexe, en donnant les modèles lorsque $n = 8$. Il ne semble pas s'être intéressé aux dimensions des trajectoires. Il utilise des invariants arithmétiques qui sont les rangs, par rapport à certains indices, de tenseurs obtenus à partir du trivecteur considéré.

Cet article consiste en l'exposé du cas $n = 6$, $p = 3$; il ne contient pas de résultats bien nouveaux. Cependant, d'une part, l'étude du cas *réel* est originale; d'autre part, le point de vue envisagé est différent de celui des « Anciens », et les démonstrations sont très élémentaires.

La partie I est consacrée à des rappels, des compléments et quelques remarques générales. Les parties II et III A donnent des démonstrations nouvelles, simples des résultats connus concernant les modèles, les invariants géométriques et les dimensions des trajectoires. On y a aussi montré que certains résultats restent valables lorsque E est un espace vectoriel réel. Dans la partie III B, le cas où E est un espace vectoriel réel est complètement étudié. Enfin, deux tableaux récapitulent les résultats. Les notations utilisées sont celles de [4].

I. Définitions et rappels

Dans toute la suite, E désigne un espace vectoriel, de dimension finie, sur le corps $k = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

1. Rappels

1.1. — [4] (page 101)

On note $\wedge^p E$ la puissance extérieure p-ième de l'espace vectoriel E. Si $h : F \to E$ est une application linéaire, on note

$$h^p : \wedge^p F \to \wedge^p E \text{ la puissance extérieure } p\text{-ième de } h.$$

Si h est injective, h^p est aussi injective et on identifiera dans la suite $\wedge^p F$ et son image par h^p.

Si h est un automorphisme de E, h^p est un automorphisme de $\wedge^p E$ et l'opération de $Gl(E)$ dans $\wedge^p E$ est définie par:

$$Gl(E) \times \wedge^p E \to \wedge^p E$$
$$(h, \omega) \to h^p(\omega)$$

Dans le cas où E est de dimension finie n, soit $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ une base de E; alors

pour $p \leq n$ les p-vecteurs décomposables

$\alpha_{i_1} \wedge ... \wedge \alpha_{i_1}$ avec $1 \leq i_1 < ... < i_p \leq n$ forment une base de $\wedge^p E$

pour $p > n$ $\wedge^p E$ se réduit à 0.

1.2. — [2] (page 120)

Si $E = E_1 \oplus E_2$, on a un isomorphisme canonique,

$$\wedge^p E \simeq \bigoplus_{0 \leq q \leq p} (\wedge^q E_1 \otimes \wedge^{p-q} E_2).$$

En particulier, si E_1 est un sous-espace de E de dimension 1, E_2 un supplémentaire quelconque de E_1, donc de dimension $n - 1$, on a

$$\wedge^p E \approx (E_1 \otimes \wedge^{p-1} E_2) \oplus \wedge^p E_2$$

Cela signifie que tout élément $\omega \in \wedge^p E$ s'écrit de manière unique sous la forme

$$\omega = \alpha \wedge \theta + \omega_2$$

où $\alpha \in E_1 \subset E$; $\theta \in \wedge^{p-1}E_2 \subset \wedge^{p-1}E$; $\omega_2 \in \wedge^p E_2 \subset \wedge^p E$.

REMARQUE. — Donc $\alpha \wedge \omega = 0 \Leftrightarrow \omega = \alpha \wedge \theta$.

1.3. — Si K est un corps, H un sous-corps de K, E un espace vectoriel sur le corps H, E_K l'espace vectoriel obtenu à partir de E par extension du corps des scalaires de H à K, alors;

a) l'application η de E dans E_K définie par $\eta(x) = 1 \otimes x$ est H-linéaire injective (ce qui permettra d'identifier E à un sous-ensemble de E_K) et l'ensemble des éléments de la forme $1 \otimes x$ engendre E_K.

b) si h est un homomorphisme de l'espace vectoriel E dans l'espace vectoriel E' (espace vectoriel sur le corps H), il lui correspond un homomorphisme unique h_K de E_K dans E'_K tel que le diagramme suivant soit commutatif:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{h} & E' \\ \eta \downarrow & & \downarrow \eta' \\ E_K & \xrightarrow{h_k} & E'_K \end{array}$$

Le noyau de h_K, K-er h_K, est engendré par η (K-er h).
L'image de h_K, $Im\,.\,h_K$, est engendrée par η' ($Im\ h$).

c) il y un isomorphisme canonique de $\wedge^p E_K$ sur $(\wedge^p E)_K$.
Nous utiliserons ces remarques dans le cas où $H = \mathbf{R}$, $K = \mathbf{C}$.

REMARQUE. — En particulier $(E_{\mathbf{C}})^*$ et $(E^*)_{\mathbf{C}}$ sont canoniquement isomorphes, dès que E est un espace vectoriel réel de dimension finie. Nous les identifierons dans la suite et écrirons simplement $E^*_{\mathbf{C}}$.

2. LE RANG

2.1. — [4] (chapitre I)

DÉFINITION. — Soient E un espace vectoriel, $\omega \in \wedge^p E$ un p-vecteur de E; le *support* de ω est le plus petit sous-espace vectoriel $S_\omega \subset E$, tel que $\omega \in \wedge^p S_\omega$; sa dimension est le *rang* de ω; le *corang* de ω est la codimention de S_ω dans E.

Pour déterminer le rang d'un p-vecteur, nous utiliserons, principalement, les deux remarques suivantes, vraies si E est de dimension finie.

a) soient ω et ω' deux p-vecteurs, avec $p \geqq 2$; si $\dim (S_\omega \cap S_{\omega'}) \leqq p-2$, alors $S_{\omega+\omega'} = S_\omega + S_{\omega'}$. En particulier, si $S_\omega \cap S_{\omega'} = \{0\}$ alors, $\operatorname{rang}(\omega+\omega') = \operatorname{rang}\omega + \operatorname{rang}\omega'$.

b) soient ω un p-vecteur et ω' un q-vecteur, non nuls, si $S_\omega \cap S_{\omega'} = \{0\}$, alors $S_{\omega\wedge\omega'} = S_\omega \oplus S_{\omega'}$ et $\operatorname{rang}\omega \wedge \omega' = \operatorname{rang}\omega + \operatorname{rang}\omega'$.

2.2 — Si n est la dimension de E, supposé de dimension finie, on désigne par $\Sigma^p_{n,r}$ l'ensemble des p-vecteurs de rang r. On sait [2] (page 104) que

a) pour $3 \leqq p \leqq n-3$ cet ensemble est non vide si et seulement si $r = 0, p, p+2, p+3, \ldots, n$

b) pour les valeurs de r précédentes $\Sigma^p_{n,r}$ est une sous-variété régulière de $\wedge^p E$, de dimension $C^p_r + r(n-r)$.

2.3. — *Le rang est invariant dans l'action canonique du groupe $Gl(E)$ dans $\wedge^p E$.*

2.4. — Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie; désignons par E_C son complexifié. $\wedge^p E$ peut être considéré comme un sous-espace réel de $\wedge^p E_C$. Soit ω un élément de $\wedge^p E$, désignons par ω_C le même élément envisagé comme élément de $\wedge^p E_C$.

PROPOSITION. — $S_{\omega_C} = (S_\omega)_C$ et, ω et ω_C ont même rang.

3. LONGUEUR. B — LONGUEUR

Dans la suite on désigne par n la dimension de E.

3.1. — *Longueur — expression minimale* [4] (page 112)

Soit ω un p-vecteur non nul; ω peut s'écrire comme somme d'éléments décomposables de $\wedge^p E$ (d'une manière qui n'est pas unique).

Considérons l'ensemble F, des systèmes libres $s = \{\omega_1, \ldots, \omega_k\}$ d'éléments décomposables de $\wedge^p E$ tels que

$$\omega = \sum_{i=1}^{k} \omega_i$$

Le nombre $l(\omega) = \inf_{s \in F} k$ s'appelle *la longueur de* ω.

Soit alors $\{\omega_1, ..., \omega_k\}$ un élément de F tel que $k = l(\omega)$

$\sum_{i=1}^{l(\omega)} \omega_i$ s'appelle *une expression minimale de* ω.

REMARQUES. — 1) Il est clair que la longueur d'un p-vecteur ω est invariante dans l'action canonique du groupe linéaire $Gl(E)$ dans $\wedge^p E$.

2) Nous verrons (chapitre III, B. 2) que par passage au complexifié, la longueur d'un élément ω de $\wedge^p E$, E espace vectoriel réel, n'est pas conservée. En désignant par ω_C l'image de ω par l'injection canonique de $\wedge^p E$ dans $\wedge^p E_C$, on a

$$l(\omega_C) \leq l(\omega).$$

3.2. — *B-Longueur B-expression minimale.*

Soit B l'ensemble des bases b de E et soit ω un élément non nul de $\wedge^p E$.

A chaque $b = \{\alpha_1, ..., \alpha_n\} \in B$ on peut associer un système libre unique s_b, $(\omega_1, ..., \omega_k)$, d'éléments décomposables de $\wedge^p E$ tels que

$$\omega_i = \lambda_i \alpha_{i_1} \wedge ... \wedge \alpha_{i_1} \qquad 1 \leq i_1 < ... < i_p \leq n$$

$\forall i, 1 ... k$ et $\sum_{i-1}^{k} \omega_i = \omega$. Une telle expression s'appelle *B-expression de* ω.

Soit $F = \{s_b \mid b \in B\}$. Le nombre $L(\omega) = \inf_{s_b \in F} k$ s'appelle la *B-longueur de* ω.

Soit $(\omega_1, ..., \omega_k)$ un élément de F tel que $k = L(\omega)$, $\sum_{i=1}^{k} \omega_i$ s'appelle une *B-expression minimale de* ω.

REMARQUES. — 1) La B-longueur d'un p-vecteur non nul est toujours supérieure ou égale à sa longueur

$$l \leq L$$

2) La B-longueur d'un élément ω de $\wedge^p E$ est invariante dans l'action canonique du groupe linéaire $Gl(E)$ dans $\wedge^p E$.

3) La B-longueur n'est pas invariante par passage au complexifié (chapitre III, B. 2). Une base de E, espace vectoriel réel, étant aussi une base de E_C, nous aurons avec des notations évidentes $L(\omega_C) \leq L(\omega)$ pour tout $\omega \in \wedge^p E$.

4. Remarque générale

Les classifications ultérieures seront faites en envisageant les rangs successifs croissants.

Désignons par k le corps de base ($\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$). Nous savons que l'ensemble, $\Sigma^p_{n,r}$, des p-vecteurs de rang r de $\wedge^p k^n$, est une réunion de trajectoires de $Gl(n)$.

La classification des p-vecteurs de rang r dans $\wedge^p k^n$ se réduit à celle des p-vecteurs de rang r dans $\wedge^p k^r$; en effet soient ω_1 et ω_2 deux éléments de rang r de $\wedge^p k^n$; alors, modulo une transformation linéaire convenable, on peut supposer leurs supports confondus en un même sous-espace S de dimension r; si une transformation linéaire, $h \in Gl(k, n)$, échange ω_1 et ω_2, elle laisse invariant S et sa restriction à S échange ω_1 et ω_2, envisagés en tant qu'éléments de $\wedge^p S$; la réciproque est évidente.

Il est clair qu'à chaque orbite de $Gl(k, r)$ dans $\Sigma^p_{r,r}$ (variété des p-vecteurs de rang r dans $\wedge^p k^r$) correspond biunivoquement une orbite de $Gl(k, n)$ dans $\Sigma^p_{n,r}$ (variété des p-vecteurs de rang r dans $\wedge^p k^n$), de *même codimension.*

La classification des p-vecteurs de rang r sera donc faite dans un espace de dimension r.

5. Remarques

Dans la suite, $I(D)$ désigne l'idéal de $\wedge E$, engendré par D, droite de l'espace vectoriel E de dimension finie et $\tilde{\omega}_D$ l'image du trivecteur ω par l'application canonique: $\wedge^3 E \to \wedge^3 E/D$.

5.1. — $\omega_D = 0 \Leftrightarrow \omega \in I(D)$.

5.2. — Si D_1 et D_2 sont deux droites distinctes, et $\omega \in I(D_1) \cap I(D_2)$ alors ω est décomposable.

5.3. — Si $\tilde{\omega}_D$ est décomposable, alors l'image réciproque du support de $\tilde{\omega}$ par la projection canonique de E sur E/D est un 4-plan, $H(D, \omega)$, contenant D, que nous désignerons simplement par H_D pour ω fixé. D'autre part, à tout 3-plan P de H_D, ne contenant pas D, est attaché un élément ω_1, de $\wedge^3 P$ tel que $\omega - \omega_1$ soit un élément de $I(D)$.

5.4. — Si D et Δ sont deux droites telles que: $\omega \in I(\Delta)$, $\omega \notin I(D)$ et $\tilde{\omega}_D$ décomposable, alors Δ est contenue dans H_D.

En effet, si on désigne par $\tilde{\Delta}$ la projection de Δ sur E/D, il est clair que $\tilde{\omega}_D$ est un élément de l'idéal de $\wedge E/D$ engendré par $\tilde{\Delta}$.

5.5 — Soient D et D' deux droites distinctes de E, telles que $\tilde{\omega}_D$ et $\tilde{\omega}_{D'}$ soient décomposables; si H_D et $H_{D'}$ sont confondus, le rang de ω est strictement inférieur à 6.

En effet, il suffit de choisir dans H_D un sous-espace F de dimension 3 ne contenant ni D ni D'. D'après la remarque 5.3, il existe un élément ω_1 de $\wedge^3 F$ tel que:

$$\omega - \omega_1 \in I(D), \ \omega - \lambda\omega_1 \in I(D') \qquad \text{où} \qquad \lambda \in k$$

donc

$$(1-\lambda)\,\omega_1 \in I(D) + I(D')$$

donc

$$1 - \lambda = 0 \quad \text{et}$$
$$\omega - \omega_1 \in I(D) \cap I(D')$$

et par conséquent, le rang ne peut être plus grand que 5.

II. Etude de $\Sigma^3_{n,5}$ ($k = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$)

1. Proposition

Pour tout ω élément de $\wedge^3 E$, E de dimension 5, il existe une droite $\Delta \subset E$, telle que ω soit un élément de $I(\Delta)$.

Démonstration. — Soit D une droite quelconque. Si $\omega \notin I(D)$, $\tilde{\omega}_D$ est un élément décomposable non nul de $\wedge^3 E/D$; soit alors D' une droite supplémentaire de H_D dans E. La dimension de $H_D \cap H_{D'}$ est 3. Désignons par F ce sous-espace; d'après la démonstration de la remarque 5.5., il existe un trivecteur ω_1 de support F tel que $\omega - \omega_1$ soit un élément de $I(D) \cap I(D')$ et par conséquent nul ou décomposable. Le premier cas est trivial; dans le second $\Delta = S_{\omega-\omega_1} \cap S_{\omega_1}$ est une droite et ω un élément de $I(\Delta)$.

Si ω est de rang 5, d'après la remarque 5.2., la droite Δ est unique.

Corollaire. — 1) Soit ω un élément de $\Sigma^3_{n,5}$, il existe une base $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ de E telle que

$$\omega = \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3 + \alpha_1 \wedge \alpha_4 \wedge \alpha_5 \tag{1}$$

2) $\Sigma^3_{n,5}$ est une trajectoire de $Gl(E)$ de dimension $5(n-3)$.

2. Remarques

2.1. — L'expression (1) est pour ω, à la fois une expression minimale et une B-expression minimale: $l(\omega) = L(\omega) = 2$.

2.2. — Soit ω un élément quelconque de $\Sigma^3_{n,5}$, et Δ la droite unique, telle que ω est élément de $I(\Delta)$, alors quel que soit le sous-espace E_1, avec $S\omega = \Delta \oplus E_1$, on a $\omega \in \Delta \otimes \wedge^2 E_1$.

2.3. — Si E est hermitien (ou euclidien), compte tenu des propriétés des bivecteurs, la base, dans laquelle ω s'écrit sous forme canonique, peut-être choisie orthonormée.

III. Etude de $\Sigma^3_{6,6}$

A. — Cas complexe

Nous envisageons d'abord le cas où E est un espace vectoriel de dimension 6 sur le corps des complexes.

1. Recherche de modèles

1.1. — Proposition 1. — *Tout élément de $\Sigma^3_{6,6}$ peut s'écrire sous l'une des deux formes*

(1) $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3 + \alpha_4 \wedge \alpha_5 \wedge \alpha_6$

(2) $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3 + \alpha_1 \wedge \alpha_4 \wedge \alpha_5 + \alpha_2 \wedge \alpha_4 \wedge \alpha_6$

$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6\}$ étant une base de E. Pour le démontrer, nous utiliserons deux lemmes.

1.2. — Lemme 1. — Soient γ_1 et γ_2 deux élément de $\wedge^2 E$, de rang 4, de même support $F \subset E$. Alors, il existe $\mu \in \mathbf{C}$ tel que $\gamma_2 - \mu\gamma_1$ soit décomposable. En effet, $\wedge^4 F$ est une droite domplexe contenant $\gamma_i \wedge \gamma_j$ $i.j = 1,2$: $\gamma_1 \wedge \gamma_1$ est non nul; posons $\gamma_2 \wedge \gamma_2 = a\gamma_1 \wedge \gamma_1$, $a \in \mathbf{C}$, $a \neq 0$

$$\gamma_1 \wedge \gamma_2 = b\gamma_1 \wedge \gamma_1 \qquad b \in \mathbf{C} \text{ (b pouvant être nul)}$$

pour tout $\mu \in \mathbf{C}$ $(\gamma_2 - \mu\gamma_1) \wedge (\gamma_2 - \mu\gamma_1) = \gamma_1 \wedge \gamma_1 (a - 2\mu b + \mu^2)$ donc il existe $\mu \in \mathbf{C}$ tel que $(\gamma_2 - \mu\gamma_1) \wedge (\gamma_2 - \mu\gamma_1) = 0$ ce qui signifie que $\gamma_2 - \mu\gamma_1$ est décomposable.

REMARQUE. — Si E est un espace vectoriel sur le corps des réels, dans les hypothèses du lemme 1, deux cas pourront se présenter:

1) il existe $\mu \in \mathbf{R}$ tel que $\gamma_1 - \mu\gamma_2$ soit décomposable.

2) quel que soit $\mu \in \mathbf{R}$, $\gamma_1 - \mu\gamma_2$ est de rang 4 et de support F.

1.3. — LEMME 2. — *Quel que soit $\omega \in \Sigma^3_{6,6}$, il existe un élément $\alpha \neq 0$ de E, tel que $\alpha \wedge \omega$ soit un élément décomposable de $\wedge^4 E$.*

DÉMONSTRATION. — Soit ω un élément de $\Sigma^3_{6,6}$ et soit β un élément non nul quelconque de E. D'après I 1.2., en choisissant pour E_1 le sous-espace engendré par β, on peut écrire $\omega = \beta \wedge \gamma_1 + \omega_1$ avec $E_1 \oplus E_2 = E$, $\omega_1 \in \wedge^3 E_2 \subset \wedge^3 E$ $\gamma_1 \in \wedge^2 E_2 \subset \wedge^2 E$. ω_1 est au maximum de rang 5. Le seul cas à envisager est donc celui où ω_1 est de rang 5 et γ_1 de rang 4. Donc $\omega_1 = \alpha_1 \wedge \gamma_2$ où $\gamma_2 \in \wedge^2 E_2$. Si $\alpha_1 \in S_{\gamma_1}$ la conclusion est immédiate. Si $\alpha_1 \notin S_{\gamma_1}$ en choisissant $S_{\gamma_1} = S_{\gamma_2}$ (II), et en utilisant le lemme 1, on voit facilement que $\beta + \mu\alpha_1$ convient.

REMARQUE. — Il est possible de démontrer le lemme 2 par l'argument géométrique suivant. Soit $\omega \in \wedge^3 E$, supposons que, pour toute droite $D \subset E$, l'image ω_D de ω dans $\wedge^3 E/D$ est de rang 5; il correspond à ω_D (II) une droite dans E/D, qui définit un plan P contenant D dans E. Soit Δ l'orthogonale de D dans P; l'application $D \to \Delta$ définirait un automorphisme de l'espace projectif $P_5(\mathbf{C})$ *sans point fixe*, d'où contradiction.

1.4. — *Démonstration de la proposition*

Choisissons donc pour α un élément de E tel que $\alpha \wedge \omega$ soit décomposable

$$\omega = \alpha \wedge \gamma_1 + \omega_1 \quad \text{avec} \quad S_{\gamma_1} + S_{\omega_1} = E_2$$

Si γ_1 est de rang 2 $S_{\gamma_1} \oplus S_{\omega_1} = E_2$.
Il existe donc une base de E $\alpha_1 = \alpha, \alpha_2, \ldots, \alpha_6$ telle que

$$\underline{\omega = \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3 + \alpha_4 \wedge \alpha_5 \wedge \alpha_6} \tag{1}$$

Si γ_1 est de rang 4 $S_{\gamma_1} \cap S_{\omega_1}$ est de dimension 2. Soit α_2, α_4 une base de $S_{\gamma_1} \cap S_{\omega_1}$. Deux cas peuvent se présenter:

a) $\underline{\alpha_2 \wedge \alpha_4 \wedge \gamma_1 = 0}$. Donc [3].

$\gamma_1 = \alpha_2 \wedge \alpha_4 + \alpha_3 \wedge \alpha_5$ où $\alpha_2, \alpha_4, \alpha_3, \alpha_5$ est une base de S_{γ_1}.

Soit $\alpha_2, \alpha_4, \alpha_6$ une base de S_{ω_1}.

Alors, $\omega = (\alpha+\alpha_6') \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_4 + \alpha \wedge \alpha_3 \wedge \alpha_5$ et nous retrouvons l'expression (1).

b) $\alpha_2 \wedge \alpha_4 \wedge \gamma = 0$. Donc [3].

$\gamma_1 = \alpha_2 \wedge \alpha_3 + \alpha_4 \wedge \alpha_5$ avec $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ base de S_{γ_1}.

Par conséquent il existe une base $\{\alpha = \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_6\}$ de E telle que:

$$\underline{\omega = \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3 + \alpha_1 \wedge \alpha_4 \wedge \alpha_5 + \alpha_2 \wedge \alpha_4 \wedge \alpha_6} \qquad (2)$$

1.5. — Remarques. — a) J. A. Schouten commence la démonstration de la Prop 1 d'une manière tout à fait analogue à la précédente. En effet, après avoir remarqué que pour tout trivecteur ω de rang plus grand que 3, il existe toujours une forme u telle que ωLu soit de longueur supérieure à 1, il envisage un tel u pour ω de rang 6 donné, alors ωLu est de longueur 2 et dans une base telle que e_6 (par ex.) soit dual de u, ω s'écrit $\omega = \omega' + \omega''$ avec $\omega' = e_6 \wedge v$, où v est un bivecteur de longueur 2, ω'' un trivecteur. Les supports de v et ω'' sont contenus dans un espace E_5, de dimension 5, transverse à e_6. Si ω'' est décomposable, la démonstration se poursuit comme ci-dessus dans le cas où γ est de rang 4. Si ω'' est de rang 5, la discussion est beaucoup plus longue et plus compliquée. Elle fait intervenir les positions respectives du support de v et de la direction invariante associée à ω'', dans le support de ω'', ainsi que celles des supports des 2 trivecteurs décomposables dont la somme est ω'' et des supports des 2 bivecteurs décomposables dont la somme est v. Les invariants géométriques dont nous parlons dans la remarque suivante sont obtenus en utilisant les enveloppes des hyperplans déterminés par les formes u telles que ωLu soit décomposable.

b) *Invariants géométriques.* — ω étant un trivecteur de rang 6, considérons 2 droites D et D' telles que (I_5) $\tilde{\omega}_D$ et $\tilde{\omega}_{D'}$ soient décomposables. Alors 2 cas peuvent se présenter.

$D \subset H_{D'}$, ω est donc un élément de $I(D) + I(D')$ et, $D' \subset H_D$, $D' \not\subset H_D$. Soit $F = H_D \cap H_{D'}$, $2 \leq \dim F \leq 3$.

Choisissons dans H_D un sous-espace P de dimension 3 contenant F et dans $H_{D'}$ un sous-espace P' de dimension 3 contenant F. Il existe ω_1 et ω_1' tels que:

$$\omega - \omega_1 \in I(D); \ \omega - \omega_1' \in I(D'); \ S_{\omega_1} \cap S_{\omega_1'} = F$$

$\omega_1 - \omega_1'$ est donc un élément décomposable de $I(D) + I(D')$ et par

conséquent $\omega_1 = \omega_1'$. Donc F est de dimension 3 et $\omega_1 - \omega_1'$ est un élément de $I(D) \cap I(D')$. ω s'écrit donc $\omega = \omega_1 + \omega_2$ $D \subset S\tilde{\omega}_2$, $D' \subset S_{\omega_2}$, $S_{\omega_1} \cap S_{\omega_2} = \{0\}$. C'est à dire que ω est de type (1).

CONSÉQUENCES. — α Si ω est de type (2)

$$\omega = \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3 + \alpha_1 \wedge \alpha_4 \wedge \alpha_5 + \alpha_2 \wedge \alpha_4 \wedge \alpha_6.$$

Il est clair que si D est contenue dans $S_{\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_4}$, alors ω_D est décomposable. Réciproquement, soit D telle que $\tilde{\omega}_D$ soit décomposable. Désignons par D_i $(i = 1, 2, 4)$ la droite de E engendrée par α_i. Alors, $D \subset H_{D_1}$, $D \subset H_{D_2}$ donc $D \subset H_{D_1} \cap H_{D_2}$ et $D \subset S_{\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_4}$.

Donc $S_{\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_4}$ est le sous-espace des droites D de E, telles que $\tilde{\omega}_D$ soit décomposable.

β Si ω est de type (1)

$$\omega = \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3 + \alpha_4 \wedge \alpha_5 \wedge \alpha_6$$

Il est clair que pour toute droite D de $S_{\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3}$ (resp. $S_{\alpha_4 \wedge \alpha_5 \wedge \alpha_6}$), $\tilde{\omega}_D$ est décomposable.

Réciproquement, soit D telle que $\tilde{\omega}_D$ soit décomposable. Utilisons les notations précédentes.

* Si D est contenue dans deux H_{D_i} pour $i = 1, 2, 3$, (resp. $= 4, 5, 6$) alors D est contenue dans $S_{\alpha_4 \wedge \alpha_5 \wedge \alpha_6}$ (resp. $S_{\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3}$)

** Si non, soit par exemple

$$D \not\subset H_{D_1},\ D \not\subset H_{D_2}. \text{ Posons } H_{D_1} \cap H_D = P_1;\ H_{D_2} \cap H_D = P_2.$$

Alors, la dimension de $P_1 \cap P_2$ est au moins 2 et $P_1 \cap P_2$ est contenu dans $H_{D_1} \cap H_{D_2}$ et

$$\begin{array}{lll} \omega = \omega_1 + \omega_2 & S_{\omega_1} = P_1 & \omega_2 \in I(D_1) \cap I(D) \\ \omega = \omega_1' + \omega_2 & S_{\omega_1'} = P_2 & \omega_2' \in I(D_2) \cap I(D) \end{array}$$

$\omega_1 - \omega_1' = \omega_2' - \omega_2$ $\omega_1 - \omega_1'$ est une décomposable dont le support contient $P_1 \cap P_2$. Donc $\omega_1 = \omega_1'$, $\omega_2 = \omega_2'$ et $P_1 = P_2 = H_{D_1} \cap H_{D_2}$, $D \subset S_{\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3}$.

Les droites D de E telles que $\tilde{\omega}_D$ soit décomposable sont donc soit les droites de $S_{\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3}$ soit les droites de $S_{\alpha_4 \wedge \alpha_5 \wedge \alpha_6}$. Ceci entraîne en particulier que la décomposition de ω sous la forme $\omega = \omega_1 + \omega_2$ avec $S\omega_1 \cap S\omega_2 = \{0\}$ est unique.

c) Si E est un espace vectoriel sur le corps des réels, les éléments ω de $\Sigma^3_{n,6}$ pour lesquels il existe $\alpha \in E$, $\alpha \neq 0$, avec $\alpha \wedge \omega$ décomposable, s'écriront aussi sous la forme (1) ou sous la forme (2).

2. Trajectoires

2.1. — *Remarques préliminaires*

En chaque point de $\wedge^3 E$, l'espace tangent à $\wedge^3 E$ sera identifié à $\wedge^3 E$.

Désignons par Σ, le cône des éléments décomposables de $\wedge^3 E$, si ω est un élément de Σ, on note T_ω l'espace tangent à Σ au point ω.

Soit $\omega = \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3$ un élément de Σ $\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_6\}$ étant une base de E. Une représentation paramétrique d'un voisinage de ω dans Σ est $\lambda\,[(\alpha_1 + a_1) \wedge (\alpha_2 + a_2) \wedge (\alpha_3 + a_3)]$ où $a_i = \sum_{j=4}^{6} a_i^j \alpha_j$ et $\lambda, a_i^j \in k$.

Donc l'espace tangent, T_ω, en ω à Σ est l'ensemble des vecteurs

$$\mu\,(\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3) + \sum_{j=4}^{6} \varepsilon_1^j\, \alpha_j \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3 + \sum_{j=4}^{6} \varepsilon_2^j\, \alpha_1 \wedge \alpha_j \wedge \alpha_3 + \sum_{j=4}^{6} \varepsilon_3^j\, \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_j.$$

T_ω est donc engendré par les éléments $\alpha_i \wedge \alpha_j \wedge \alpha_k$ où $\{i, j, k\} \cap \{1, 2, 3\}$ contient au moins 2 éléments.

2.2. — Proposition 2. — *L'ensemble T_1, des trivecteurs de rang 6 et de longueur deux est une trajectoire ouverte de $Gl(E)$ dans $\wedge^3 E$.*

Il est clair que cet ensemble constitue une trajectoire de $Gl(E)$ qui est une sous-variété de $\wedge^3 E$, en tant que trajectoire d'un groupe de Lie. Il reste à déterminer sa dimension.

Les ω s'écrivant sous la forme (1) sont caractérisés par

$$\begin{cases} \omega = \omega_1 + \omega_2 \\ \omega_i \in \Sigma \qquad i \in \{1, 2\} \\ \omega_1 \wedge \omega_2 \neq 0 \end{cases}$$

Soit $U \subset \Sigma \times \Sigma \qquad U = \{(\omega_1, \omega_2) \mid \omega_1 \wedge \omega_2 \neq 0\}$

$f : \Sigma \times \Sigma \to \wedge^6 E$ définie par $f(\omega_1, \omega_2) = \omega_1 \wedge \omega_2$ est continue. Donc U est ouvert.

Soit $h : U \to \wedge^3 E$ définie par $h\,(\omega_1, \omega_2) = \omega_1 + \omega_2$ h est différentiable et $h' : T_{\omega_1} \oplus T_{\omega_2} \to \wedge^3 E$ est telle que $h'\,(\eta_1, \eta_2) = \eta_1 + \eta_2$.

Soit $\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_6\}$ une base de E telle que

$$\omega_1 = \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3, \quad \omega_2 = \alpha_4 \wedge \alpha_5 \wedge \alpha_6$$

$T_{\omega_1} \cap T_{\omega_2} = \{0\}$ donc $Ker\ h' = \{0\}$ et h' est un difféomorphisme local. L'image de U par h est donc un ouvert.

2.3 — PROPOSITION 3. — *L'ensemble, T_2, des trivecteurs de rang 6 qui s'écrivent sous la forme* (2) *est une trajectoire de codimension* 1.

Il est clair que cet ensemble est une trajectoire de $Gl(E)$. Nous avons à déterminer sa dimension.

Les ω qui s'écrivent sous la forme (2) sont caractérisés par:

$$\left[\begin{array}{l} \omega = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 \\ \omega_i \in \Sigma \quad i \in \{1, 2, 3\} \\ \dim S_{\omega_i} \cap S_{\omega_j} = 1 \\ S_{\omega_i} \cap S_{\omega_j} \not\subset S_{\omega_k} \text{ pour } i \neq j \neq k \neq i \\ i, j, k \in \{1, 2, 3\} \end{array}\right] \text{conditions (a)}$$

Soit $V \subset \Sigma \times \Sigma \times \Sigma$, $\quad V = \{(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \mid S_{\omega_1}, S_{\omega_2}, S_{\omega_3} \text{ vérifient } (a)\}$.

V est une sous-variété régulière de codimension 3, en effet, considérons

$$f_i \qquad i \in \{1, 2, 3\}$$
$$f_i : \Sigma \times \Sigma \times \Sigma \to \Lambda^6 E \simeq k$$

$f_i(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = \omega_j \wedge \omega_k$ où i, j, k est une permutation paire de 1, 2, 3.

V est l'ensemble des $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ où $f_i = f_2 = f_3 = 0$ et où df_1, df_2, df_3 sont linéairement indépendantes.

Soit $h : \Sigma \times \Sigma \times \Sigma \to \Lambda^3(E)$ définie par

$$h(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3$$

la restriction f de h à V est de rang 19.

En effet, en un point de V, il existe un seul vecteur de base de $\Lambda^3(E)$ qui ne se laisse pas écrire dans $T_{\omega_1} + T_{\omega_2} + T_{\omega_3}$, c'est avec les notations précédentes $\alpha_3 \wedge \alpha_5 \wedge \alpha_6$. D'autre part, $Ker\ h'$ est transverse à l'espace tangent à V en un point de V. f est donc aussi de rang 19 et $f(V)$ est une sous-variété de codimension 1.

REMARQUE. — Soit $\omega = \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3 + \alpha_1 \wedge \alpha_4 \wedge \alpha_5 + \alpha_2 \wedge \alpha_4 \wedge \alpha_6$.

Si nous faisons dans E le changement de base

$$\alpha_1 = 2\beta_1 + \gamma_1, \quad \alpha_2 = \beta_2 + \frac{\gamma_2}{2}, \quad \alpha_5 = \frac{\beta_2}{2},$$

$$\alpha_6 = \frac{\gamma_1}{2}, \qquad \alpha_4 = 2\beta_3 + \gamma_3, \; \alpha_3 = \beta_3 + \gamma_3,$$

il vient

$$\omega = -\beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \beta_3 - \tfrac{1}{4}\gamma_1 \wedge \gamma_2 \wedge \gamma_3 + (\beta_1+\gamma_1) \wedge (\beta_2+\gamma_2) \wedge (\beta_3+\gamma_3).$$

Nous avons deux expressions minimales de ω. Dans la première les supports des ω_i ont deux à deux une droite en commun, dans la seconde, ils sont deux à deux en position de somme directe. Ce résultat met en défaut la conjecture de J. Martinet [4] (page 113).

3. — Si E est de dimension n, il est clair que la proposition 1 reste vraie en remplaçant $\Sigma^3_{6,6}$ par $\Sigma^3_{n,6}$. Les propositions 2 et 3 deviennent:

PROPOSITION 2. — *L'ensemble des trivecteurs de rang* 6 *et de longueur* 2 *est une trajectoire ouverte dans* $\Sigma^3_{n,6}$.

PROPOSITION 3. — *L'ensemble des trivecteurs de rang* 6 *et de longueur* 3 *est une trajectoire de codimension un dans* $\Sigma^3_{n,6}$, *c'est-à-dire de dimension* $19 + 6(n-6)$.

B. — CAS RÉEL

Dans la suite E désigne un espace vectoriel réel de dimension $n = 6$.

1. — Désignons par $E_{\mathbf{C}}$ le complexifié de E

$\Sigma^3_{\mathbf{C}6,6}$ l'ensemble des éléments de rang 6 de $\Lambda^3 E_{\mathbf{C}}$

$\omega_{\mathbf{C}} \in \Lambda^3 E_{\mathbf{C}}$ l'image canonique de $\omega \in \Lambda^3 E$

(très souvent on identifiera ω et $\omega_{\mathbf{C}}$).

E est identifié au sous-ensemble des éléments $1 \otimes \alpha$ de $E_{\mathbf{C}}$ où $\alpha \in E$.

Une base de E étant aussi une base de $E_{\mathbf{C}}$, il est clair, en considérant les formes canoniques obtenues pour les différents éléments de $\Lambda^3 E_{\mathbf{C}}$, que toutes les trajectoires de $Gl(E_{\mathbf{C}})$ dans $\Lambda^3 E_{\mathbf{C}}$ rencontrent $\Lambda^3 E$.

PROPOSITION 1. — *Tout trivecteur de rang 6 s'écrit sous l'une des formes*

$(1)_a$ $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3 + \alpha_4 \wedge \alpha_5 \wedge \alpha_6$

$(1)_b$ $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3 + \alpha_1 \wedge \alpha_4 \wedge \alpha_5 + \alpha_2 \wedge \alpha_4 \wedge \alpha_6 - \alpha_3 \wedge \alpha_5 \wedge \alpha_6$

(2) $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3 + \alpha_1 \wedge \alpha_4 \wedge \alpha_5 + \alpha_2 \wedge \alpha_4 \wedge \alpha_6$

$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6\}$ étant une base de E.

DÉMONSTRATION. — Soit ω un élément de $\Sigma^3_{6,6}$. Utilisons la remarque 1 et les démonstrations des lemmes 1 et 2 de A. Le seul cas à examiner est celui où nous ne savons pas s'il existe $\alpha \neq 0$ $(\alpha \in E)$ tel que $\alpha \wedge \omega$ soit décomposable. Alors $\omega = \alpha \wedge \gamma_1 + \alpha_1 \wedge \gamma_2$ où $\alpha \in E$ $\alpha \neq 0$ quelconque Δ_1 est la droite engendrée par α_1;

E_1 la droite engendrée par α; $E = E_1 \oplus E_2$; $E_2 = \Delta_1 \oplus S_{\gamma 1}$; $S_{\gamma 1} = S_{\gamma 2} = F$; γ_1 et $\gamma_2 \in \Lambda^2 F$ de rang 4.

Chacun de ces sous-espaces en engendre un dans $E_{\mathbf{C}}$.

Nous reprenons la démonstration du lemme 1 avec a, $b \in \mathbf{R}$.

Alors, l'équation $a - 2\mu b + \mu^2 = 0$, a deux racines complexes conjugées

$$x = b + ic \quad , \quad \bar{x} \quad c \neq 0.$$

$\gamma_2 - x\gamma_1$ et $\gamma_2 - \bar{x}\gamma_1$ sont deux éléments décomposables de $\Lambda^2 F_{\mathbf{C}}$. Posons

$$\gamma_2 - x\gamma_1 = \beta_2 \wedge \beta_3, \ \beta_2 = \alpha_2 + i\alpha_5, \ \beta_3 = \alpha_3 + i\alpha_4 \text{ où}$$

$$\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5 \in E \text{ et } \alpha_6 = \frac{\alpha + b\alpha_1}{c}.$$

Nous obtenons l'expression

$$\underline{\omega = \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3 + \alpha_1 \wedge \alpha_4 \wedge \alpha_5 + \alpha_2 \wedge \alpha_4 \wedge \alpha_6 - \alpha_3 \wedge \alpha_5 \wedge \alpha_6}$$

et $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6\}$ est une base de E car $\gamma_2 - b\gamma_1$ $(= \alpha_2 \wedge \alpha_3 + \alpha_4 \wedge \alpha_5)$ est de rang 4.

Remarquons que:

$$\omega = \tfrac{1}{2}(\alpha_1 - i\alpha_6) \wedge (\alpha_2 + i\alpha_5) \wedge (\alpha_3 + i\alpha_4) + \tfrac{1}{2}(\alpha_1 + i\alpha_6) \wedge (\alpha_2 - i\alpha_5) \wedge (\alpha_3 - i\alpha_4)$$

donc ω ne peut être mis sous la forme $(1)_a$ compte tenu de la remarque (B 1.5.a).

2. On en déduit la proposition suivante:

PROPOSITION 2. — *L'ensemble $\Sigma^3_{6,6}$ est constitué de trois orbites.*

1) Deux orbites ouvertes correspondant aux modèles $(1)_a$ et $(1)_b$.

2) Une orbite de codimension 1 correspondant au modèle (2).

REMARQUES. — 1) Tout ω élément de $\Sigma^3_{6,6}$ tel que ω_C est de longueur 3, est aussi de longueur 3.

2) Soit ω de B-longueur 4. Dans $\wedge^3 E$ on peut aussi l'écrire

$$\omega = -(\alpha_5 - \alpha_2) \wedge \alpha_3 \wedge \alpha_1 + (\alpha_5 + \alpha_2) \wedge \alpha_4 \wedge \alpha_6 + (\alpha_1 + \alpha_6) \wedge \alpha_5 \wedge (\alpha_3 - \alpha_4)$$

ω est donc de longueur 3 et les supports des trivecteurs décomposables qui interviennent dans l'expression donnée sont deux à deux en position de somme directe.

3) La précédente remarque montre que la longueur et la B-longueur ne sont conservées par complexification.

4) Pour $n > 6$ il est clair que la proposition 1 est conservée. Les conclusions de la proposition 2 sont remplacées par les suivantes:

1. Deux orbites ouvertes dans $\Sigma^3_{n,6}$ correspondant aux modèles $(1)_a$ et $(1)_b$.

2. Une orbite de codimension 1 dans $\Sigma^3_{n,6}$, c'est à dire de dimension $19 + 6(n-6)$.

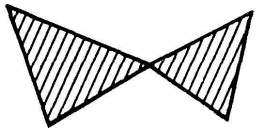
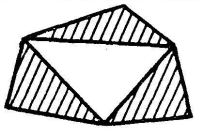
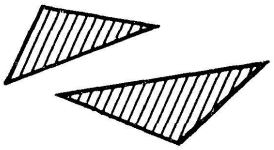
3. Récapitulation

3.1. — On peut remplacer la conjecture de J. Martinet [4] (page 113) par la suivante:

Soient $\omega = \sum_{i=1}^{k} \omega_i$ et $\omega = \sum_{j=1}^{k} \omega'_j$ deux B-expressions minimales de ω; les collections F et F' de sous-espaces F_i et F'_j, support respectif de ω_i et ω'_j sont égales dans E, c'est-à-dire qu'il existe un automorphisme g de E tel que, pour tout i il existe j avec $g(F_i) = F'_j$.

3.2. — Les tableaux suivants résument les résultats relatifs aux trajectoires de $Gl_6(k)$ dans $\Lambda^3 E_6$, espace vectoriel de dimension 20 sur k;

$k = \mathrm{C}$

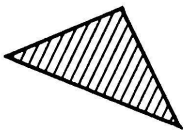
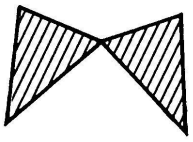
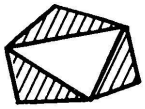
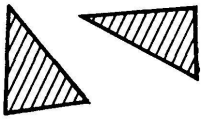
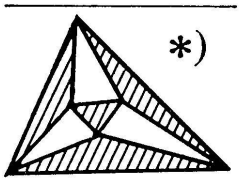
Rang	Longueur	Modèle	Dimension de la trajectoire
0	0		0
3	1		10
5	2		15
6	3		19
	2		20

1) Les sommets des triangles représentent des vecteurs de E linéairement indépendant.

2) Chaque triangle représente un trivecteur décomposable de support le sous-espace engendré par les trois sommets.

3) Chaque figure représente le trivecteur somme des trivecteurs décomposables représentés par chacun des triangles.

$k = \mathrm{R}$

Rang	Longueur	*B*-Longueur	Modèle	Dimension de la trajectoire
0	0	0		0
3	1	1		10
5	2	2		15
6	3	3		19
	2	2		20
	3	4	 *)	20

*) Dans ce cas les coefficients attribués aux trivecteurs décomposables ne sont pas indifférents.

Il est évident que le rang, la longueur, la B-longueur sont des invariants très grossiers. Ils ne suffiront plus à distinguer les trajectoires lorsque $n > 6$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] GODBILLON, C. *Géométrie différentielle et mécanique analytique*, Hermann, Paris, 1969.

[2] GREUB, W. H. *Multilinear Algebra*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1967.

[3] LIBERMANN, P. Forme canonique d'une forme différentielle extérieure quadratique fermée, *Bull. Ac. Roy. Belg. Cl. Sc.* (5), 39, 1953, pp. 846-850.

[4] MARTINET, J. Sur les singularités des formes différentielles, *Annales de l'Institut Fournier*, Tome XX, Fasicule 1, 1970, pp.95-178.

[5] REICHEL, W. *Über die trilinearen alternieren den Formen in 6 und 7 Veränderlichen*, Dissertation, Greifswald, 1907.
[6] SCHOUTEN, J. A. Klassifizierung der alternierenden Grössen dritten grades in 7 Dimension, *Rend. Cir. mat. Palermo*, 55, 1931.
[7] GUREVICH, G. B. On tri-vectors in a space of 7 dimensions, *Dokl A.N. S.S.S.R.* III, Nos. 8-9, 1934.
[8] —— Classification of tri-vectors of rank 8, *Dokl A.N. S.S.S.R.* II, Nos. 5-6, 1935.
[9] —— *Theory of algebraic invariants*, P. Moordhoff, L.T.D. Groningen, The Netherlands.

(Reçu le 18 avril 1972)

Bernadette Capdevielle
Institut des Sciences Exactes et Appliquées
22, rue des Frères Lumière, 68 Mulhouse-Dornach et

et

Institut de Recherches Mathématiques Avancées
Université Louis Pasteur
7, rue René Descartes, 67 Strasbourg

vide-leer-empty