6. Arbre associé a une variété de dimension 1

6. Arbre associé a une variété de dimension 1

6.1 *Définition. Un point de branchement de X est un point de X non séparé d'un autre point de X.*

6.2 *Hypothèse. On suppose dans la suite que X est une variété topologique de dimension 1 à base dénombrable, simplement connexe et ordonnée, dont l'ensemble B des points de branchement est fini (et non vide)* [1]).

Si B a n éléments le complémentaire $U = X - B$ est un ouvert séparé de X ayant $n + 1$ composantes connexes (toutes homéomorphes à $\mathbf{R}$). L'ordre sur X détermine alors un ordre sur l'ensemble de ces composantes connexes.

Dans ces conditions on peut associer à X un graphe ordonné, noté $\hat{X}$, de la façon suivante:

(i) l'ensemble des sommets de $\hat{X}$ est l'ensemble des composantes connexes de l'ouvert $U = X - B$;

(ii) il existe une arête (ordonnée) d'origine a et d'extrémité b si et seulement si

— $a < b$,

— $a \leqslant c \leqslant b$ entraîne $c = a$ ou $c = b$.

Il y a donc une correspondance biunivoque entre les arêtes de $\hat{X}$ et les points de branchements de X; et par conséquent $\hat{X}$ possède la propriété suivante:

(P) *pour toute arête α de $\hat{X}$ il existe une arête β de $\hat{X}$, $\beta \neq \alpha$, telle que α et β aient même origine ou même extrémité.*

6.3 *Proposition. Le graphe $\hat{X}$ est un arbre.*

En effet [2] le complémentaire d'un point de X a deux composantes connexes.

On dit alors que $\hat{X}$ est l'*arbre (ordonné) associé à la variété ordonnée X.*

---

[1]) Cette hypothèse est par exemple satisfaite pour les feuilletages du plan définis par des équations polynomiales.

6.4 *Exemples.* Arbres associés aux variétés ayant au plus 4 points de branchement:

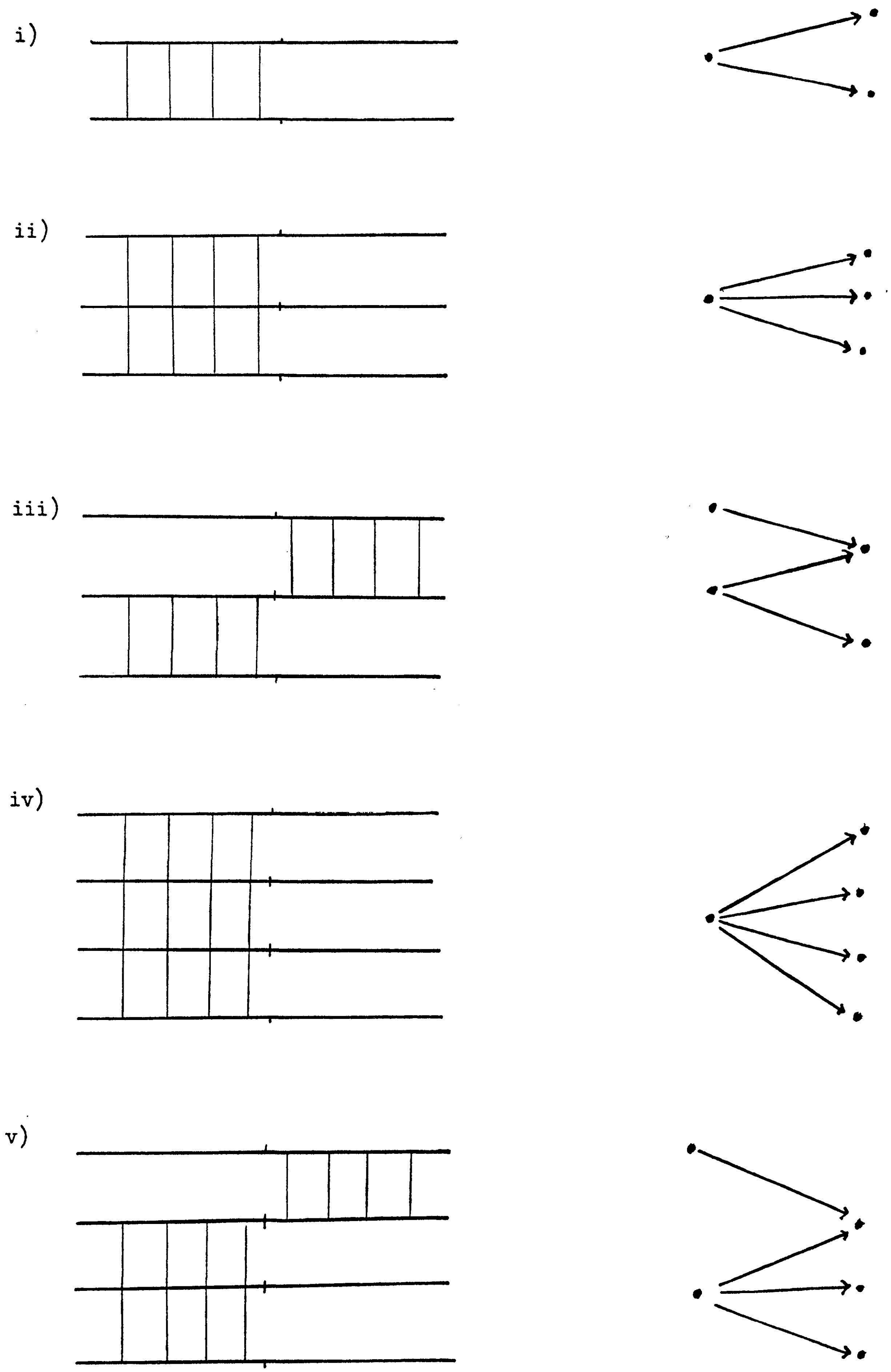
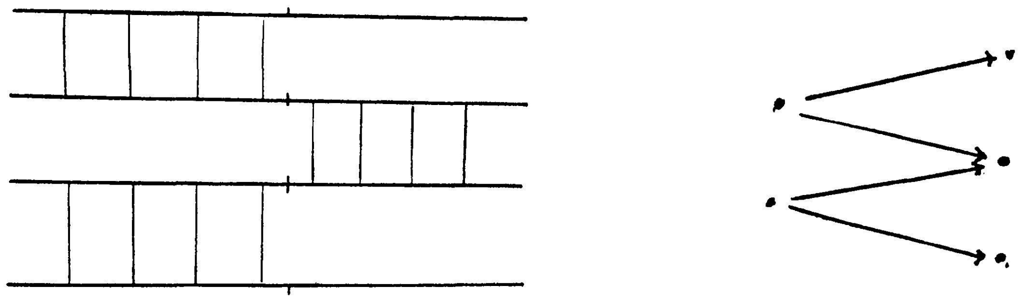
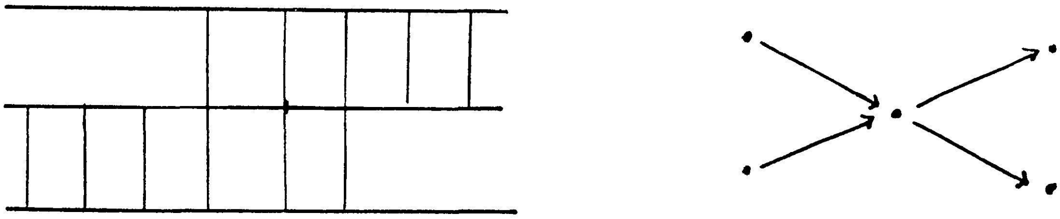


FIG. 2

vi)



vii)



viii)

ix)

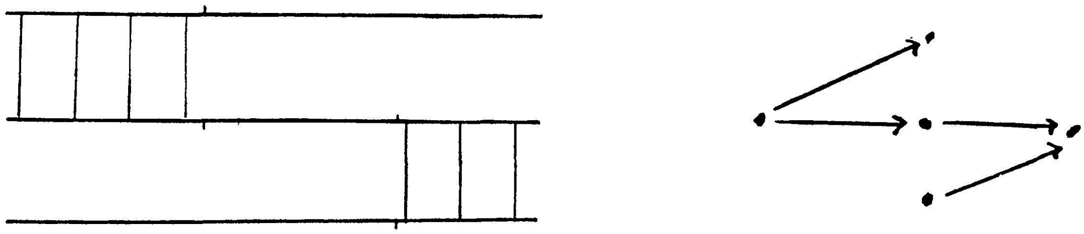


FIG. 2 *(suite)*

6.5 *Proposition. Soit Y une seconde variété ordonnée, et soit $\hat{Y}$ l'arbre ordonné associé à Y. Un homéomorphisme f de X sur Y détermine un isomorphisme $\hat{f}$ de $\hat{X}$ sur $\hat{Y}$. Si f est croissant (resp. décroissant) il en est de même de $\hat{f}$.*

En effet f transforme l'ensemble des points de branchement de X en l'ensemble des points de branchement de Y.

Inversement la donnée d'un arbre ordonné fini $\hat{A}$ vérifiant la propriété (P) détermine une variété de dimension 1 ordonnée A ayant un arbre associé isomorphe à $\hat{A}$ (on construit A par récurrence sur le nombre de sommets de $\hat{A}$ en commençant par en ôter un sommet extrémal).

Soit $\hat{B}$ un autre tel arbre, et soit B une variété de dimension 1 ayant $\hat{B}$ pour arbre associé. Un isomorphisme $\hat{g}$ de $\hat{A}$ sur $\hat{B}$ détermine (de façon non univoque) un homéomorphisme g de A sur B tel que $\hat{g}$ lui corresponde par la construction de 6.5.

Par conséquent:

6.6 THÉORÈME. *La classification des variétés topologiques de dimension* 1 *à base dénombrable, simplement connexes, ordonnées, ayant un nombre fini de points de branchement est équivalente à la classification des arbres ordonnés finis vérifiant la propriété* (P).

6.7 *Définition. Un point de branchement x de X est simple si l'ensemble B_x des points $y \neq x$ non séparés de x possède l'une des deux propriétés suivantes :*

a) *B_x est réduit à un seul point ;*

b) *B_x ne contient que deux points distincts qui sont eux-mêmes séparés.*

On dit alors que X est *simple* si tous ses points de branchement sont simples.

Dans ces conditions en chaque sommet non extrémal de l'arbre $\hat{X}$ associé à X la configuration est semblable à l'une des trois suivantes:

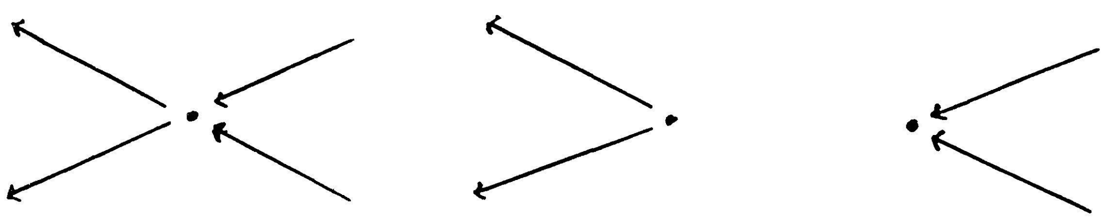


FIG. 3

En particulier les exemples ii), iv) et v) de 6.4 ne sont pas simples.