Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 18 (1972)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: FIBRES EN DROITES ET FEUILLETAGES DU PLAN

Autor: Godbillon, Claude

Kapitel: 2. Un exemple important: le branchement simple [1]

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-45373

On peut donc ramener le problème de la classification des feuilletages du plan aux deux problèmes suivants:

(i) classifier les variétés topologiques de dimension 1 à base dénombrable et simplement connexes;

(ii) classifier sur une telle variété les fibrés en droites localement triviaux ayant un espace total séparé.

2. Un exemple important: le branchement simple [1]

Le *branchement simple* Z est la variété topologique de dimension 1 à base dénombrable et contractile obtenue à partir de l'espace somme de deux exemplaires R_1 et R_2 de la droite réelle $\mathbf{R}$ en identifiant les points $x_1 \in R_1$ et $x_2 \in R_2$ pour $x_1 = x_2 < 0$.

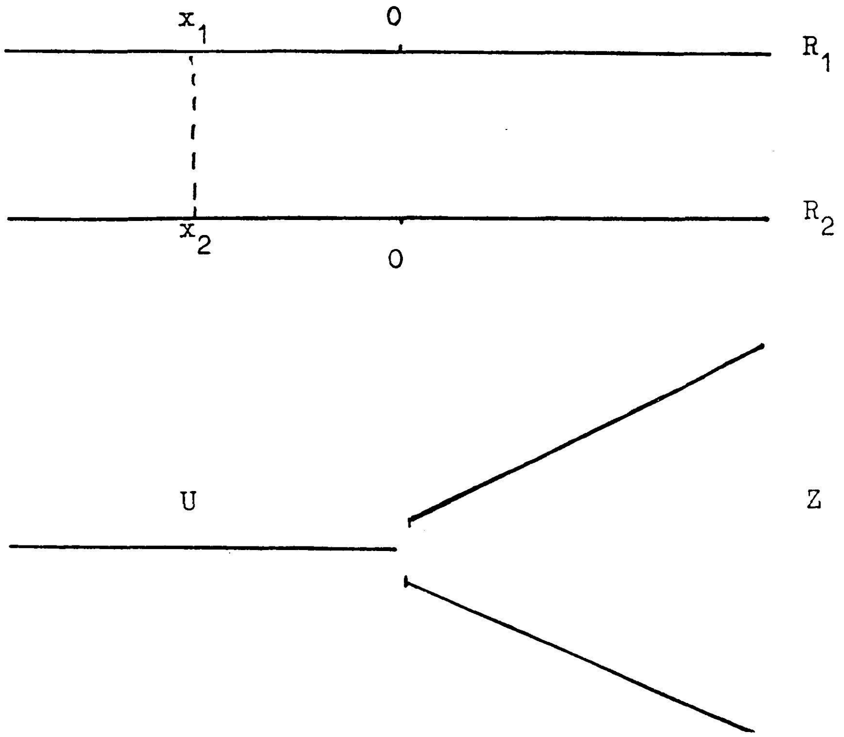

Fig. 1

On identifie à $]-\infty, 0[$ l'ouvert U de Z correspondant aux points $x_1 < 0$ de R_1.

La donnée d'un fibré en droites localement trivial $\eta : E \xrightarrow{p} Z$ sur Z est équivalente à celle d'une application continue g de U dans le groupe G des homéomorphismes de $\mathbf{R}$.

2.1 *Proposition. Pour que l'espace total E soit séparé il faut et il suffit que pour tout* $y \in \mathbf{R}$ *on ait* $\lim_{x \to 0} g_x(y) = -\infty$ (*ou* $\lim_{x \to 0} g_x(y) = +\infty$).

2.2 *Exemple.* Si $g : U \to G$ est l'application associant à $x \in]-\infty, 0[$ la translation $g_x : y \to y + \frac{1}{x}$, l'espace total E du fibré $\eta : E \xrightarrow{p} Z$ correspondant à g est séparé.

On peut aussi vérifier que si $\eta' : E' \xrightarrow{p'} Z$ est le fibré correspondant à l'application $g^{-1}\left(g_x^{-1} : y \to y - \frac{1}{x}\right)$ alors:

(i) η et η' sont équivalents pour le groupe G;

(ii) η et η' ne sont pas équivalents pour le groupe G^+ des homéomorphismes croissants de $\mathbf{R}$;

(iii) η et η' sont isomorphes pour le groupe G^+.

2.3 THÉORÈME [1]. *Soient* η *et* η' *deux fibrés en droites sur Z correspondant à deux applications g et g' de U dans le groupe* G^+ *et ayant des espaces totaux séparés. Pour que* η *et* η' *soient équivalents pour le groupe* G^+ *il faut et il suffit que pour tout* $y \in \mathbf{R}$ *on ait* $\lim_{x \to 0} g_x(y) = \lim_{x \to 0} g'_x(y)$.

Par conséquent les fibrés en droites localement triviaux sur le branchement simple, ayant un espace total séparé, se répartissent en

2 classes d'équivalence pour le groupe G^+;

1 classe d'isomorphie pour le groupe G^+;

1 classe d'équivalence pour le groupe G.

3. VARIÉTÉS DE DIMENSION 1 SIMPLEMENT CONNEXES

On désigne maintenant par X une variété topologique de dimension 1 à base dénombrable et simplement connexe.

3.1 *Proposition. Il existe sur X un ordre localement isomorphe à l'ordre de la droite réelle* $\mathbf{R}$.

En effet [2] la variété X s'étale sur $\mathbf{R}$.